Arithmétique

Cours BTS SIO 2ème année

Année 2025/2026

Plan du cours

1. Division euclidienne dans $\mathbb{N}$
2. Nombres premiers
   - Multiples et Diviseurs
   - Nombres premiers
   - Test de primalité
   - Décomposition en nombres premiers
3. PGCD de deux entiers naturels
   - Plus Grand Diviseur Commun
   - Algorithme d'Euclide

Division euclidienne dans $\mathbb{N}$

Quelques rappels :

- $\mathbb{N} = \{0; 1; 2; 3; \ldots\}$ est l'ensemble des **entiers naturels**

Division euclidienne dans $\mathbb{N}$

Quelques rappels :

- $\mathbb{N} = \{0; 1; 2; 3; \ldots\}$ est l'ensemble des **entiers naturels**
- Étant donnés deux entiers naturels A et B non nuls, il existe deux entiers naturels uniques Q et R tels que :

$$A = B \times Q + R \qquad \text{avec} \quad R < B$$

C'est la **division euclidienne** de A par B.

Division euclidienne dans $\mathbb{N}$

Quelques rappels :

- $\mathbb{N} = \{0; 1; 2; 3; \dots\}$ est l'ensemble des **entiers naturels**
- Étant donnés deux entiers naturels A et B non nuls, il existe deux entiers naturels uniques Q et R tels que :

$$A = B \times Q + R \qquad \text{avec} \quad R < B$$

  C'est la **division euclidienne** de A par B.
- A est le *dividende*, B est le *diviseur*, Q est le *quotient* et R est le *reste*

Division euclidienne dans $\mathbb{N}$

Quelques rappels :

- $\mathbb{N} = \{0; 1; 2; 3; \dots\}$ est l'ensemble des **entiers naturels**
- Étant donnés deux entiers naturels A et B non nuls, il existe deux entiers naturels uniques Q et R tels que :

  $$A = B \times Q + R \qquad \text{avec} \quad R < B$$

  C'est la **division euclidienne** de A par B.
- A est le *dividende*, B est le *diviseur*, Q est le *quotient* et R est le *reste*
- Exemple : la division euclidienne de 22 par 6 donne :

$$22 = 6 \times 3 + 4 \qquad\qquad \begin{array}{r|l} 2\,2 & 6 \\ \cline{2-2} 4 & 3 \end{array}$$

Exercice 1

Effectuer les divisions euclidiennes suivantes :

1. 28 par 8
2. 100 par 9
3. 379 par 11
4. 427 par 13

Multiples et Diviseurs

Soient a et b deux entiers naturels. Dire que b est un **diviseur** de a veut dire que la division euclidienne de a par b donne un reste nul.

Cela signifie donc qu'il existe un entier naturel k tel que $a = k \times b$.

On peut également dire que a est **multiple** de b.

Multiples et Diviseurs

Soient a et b deux entiers naturels. Dire que b est un **diviseur** de a veut dire que la division euclidienne de a par b donne un reste nul.

Cela signifie donc qu'il existe un entier naturel k tel que $a = k \times b$.

On peut également dire que a est **multiple** de b.

Exemple : $20 = 4 \times 5$ donc 4 et 5 sont des diviseurs de 20, et 20 est une multiple de 4 et de 5.

Multiples et Diviseurs

Exercice 2

Identifier les couples de nombres entiers multiples/diviseurs parmi les nombres suivants :

1. 251 et 13
2. 8 et 80
3. 111 et 37
4. 8 192 et 131 072

Exercice 3

Déterminer l'ensemble des diviseurs des nombres suivants :

15 20 37 50

Définition

Un entier naturel est dit **premier** s'il admet exactement 2 diviseurs distincts : 1 et lui-même.

Définition

Un entier naturel est dit **premier** s'il admet exactement 2 diviseurs distints : 1 et lui-même.

- 0 n'est **pas** premier car divisible par tous les entiers naturels (sauf lui-même !)

Nombres premiers

Définition

Un entier naturel est dit **premier** s'il admet exactement 2 diviseurs distints : 1 et lui-même.

- 0 n'est **pas** premier car divisible par tous les entiers naturels (sauf lui-même !)
- 1 n'est **pas premier** car il n'admet qu'un unique diviseur : lui-même

Nombres premiers

Définition

Un entier naturel est dit **premier** s'il admet exactement 2 diviseurs distints : 1 et lui-même.

- 0 n'est **pas** premier car divisible par tous les entiers naturels (sauf lui-même !)
- 1 n'est **pas premier** car il n'admet qu'un unique diviseur : lui-même
- Les premiers nombres premiers sont :

$$2 \quad 3 \quad 5 \quad 7 \quad 11 \quad 13 \quad 17 \quad 19 \quad \ldots$$

Nombres premiers

Définition

Un entier naturel est dit **premier** s'il admet exactement 2 diviseurs distints : 1 et lui-même.

- 0 n'est **pas** premier car divisible par tous les entiers naturels (sauf lui-même !)
- 1 n'est **pas premier** car il n'admet qu'un unique diviseur : lui-même
- Les premiers nombres premiers sont :

$$2 \quad 3 \quad 5 \quad 7 \quad 11 \quad 13 \quad 17 \quad 19 \quad \ldots$$

- Il existe une **infinité de nombres premiers** (Euclide, -300 av. JC)

Crible d'Ératosthène

Exercice 4

On considère un tableau carré de nombres de 1 à n^2 (où $n \in \mathbb{N}$).

- Barrer le 1
- Entourer 2 et barrer tous ses multiples.
- Une fois cela fait, 3 est le premier nombre non barré après 2 : on l'entoure et on barre tous ses multiples.
- Continuer jusqu'à ce que tous les nombres de la grilles soient traités (soit barrés soit entourés).
- **Les nombres entourés sont des nombres premiers**

Test de primalité

Propriété

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2.

n est **composé** (non premier) si et seulement si n possède un diviseur premier compris entre 2 et $\sqrt{n}$

Test de primalité

Propriété

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2.

n est **composé** (non premier) si et seulement si n possède un diviseur premier compris entre 2 et $\sqrt{n}$

Méthode

Pour déterminer si un entier $n \geq 2$ est premier :

- *on dresse la liste des nombres premiers inférieurs ou égaux à $\sqrt{n}$*
- *n est premier si et seulement s'il n'est divisible par aucun de ces nombres premiers*

Test de primalité

Exercice 5

Parmi les entiers naturels suivants, lesquels sont premiers ?

$$143 \qquad 145 \qquad 141 \qquad 147 \qquad 247 \qquad 257$$

☞ *Exercices 6,7*

Décomposition en nombres premiers

Propriété

Tout entier naturel supérieur ou égal à 2 se décompose de manière unique en produit de facteurs premiers (à l'ordre des facteurs près).

Décomposition en nombres premiers

Propriété

Tout entier naturel supérieur ou égal à 2 se décompose de manière unique en produit de facteurs premiers (à l'ordre des facteurs près).

Exercice 7

Décomposer les nombres suivants en produit de facteurs premiers :

$$30 \qquad 60 \qquad 96 \qquad 684$$

Plus Grand Diviseur Commun

Définition

Soient a et b deux entiers naturels non nuls.
On note $pgcd(a;b)$ et on lit « pgcd de a et de b » le plus grand entier qui divise à la fois a et b.

Plus Grand Diviseur Commun

Définition

Soient a et b deux entiers naturels non nuls.
On note $pgcd(a; b)$ et on lit « pgcd de a et de b » le plus grand entier qui divise à la fois a et b.

Définition

Deux entiers a et b sont dits **premiers entre eux** si $pgcd(a; b) = 1$.

Plus Grand Diviseur Commun

Définition

Soient a et b deux entiers naturels non nuls.
On note $pgcd(a;b)$ et on lit « pgcd de a et de b » le plus grand entier qui divise à la fois a et b.

Définition

Deux entiers a et b sont dits **premiers entre eux** si $pgcd(a;b) = 1$.

Exemple

Diviseurs de 20 : 1,2,4,5,**10**,20
Diviseurs de 30 : 1,2,3,5,6,**10**,30
$pgcd(20;30) = 10$

Algorithme d'Euclide

Propriété

Soient a et b deux entiers naturels non nuls.
Si la division euclidienne de a par b est $a = b \times q + r$, alors :

$$pgcd(a; b) = pgcd(b; r)$$

Algorithme d'Euclide

Propriété

Soient a et b deux entiers naturels non nuls.
Si la division euclidienne de a par b est $a = b \times q + r$, alors :

$$pgcd(a; b) = pgcd(b; r)$$

Ce résultat est à l'origine de l'**algorithme d'Euclide** pour déterminer le pgcd de deux nombres, en effectuant des divisions euclidiennes successives.

Le pgcd est le **dernier reste non nul** dans les divisions successives.