Exercices : Arithmétique

Exercice 01 ***Division à l'ancienne***

Effectuer les divisions euclidiennes suivantes :

1. 28 par 8
2. 100 par 9
3. 379 par 11
4. 427 par 13

Exercice 02 ***Multiples et Diviseurs***

Identifier les couples de nombres entiers multiples/diviseurs parmi les nombres suivants :

1. 251 et 13
2. 8 et 80
3. 111 et 37
4. 8 192 et 131 072

Exercice 03 ***Trouvez-les tous***

Déterminer l'ensemble des diviseurs des nombres suivants :

15 20 37 50

Exercice 04 ***Crible d'Ératosthène***

On considère un tableau carré de nombres de 1 à 100, représenté ci-dessous.

- Barrer le 1
- Entourer 2 et barrer tous ses multiples.
- Une fois cela fait, 3 est le premier nombre non barré après 2 : on l'entoure et on barre tous ses multiples.
- Continuer jusqu'à ce que tous les nombres de la grilles soient traités (soit barrés soit entourés).
- **Les nombres entourés sont des nombres premiers**

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

Exercice 05 ***Test de primalité***

Parmi les entiers naturels suivants, lesquels sont premiers ?

143 145 141 147 247 257

Exercice 06 ***Premiers jumeaux***

On appelle **nombres premiers jumeaux** deux nombres premiers qui diffèrent de 2.

Donner 3 exemples de couples de nombres premiers jumeaux plus grands que 10.

Exercice 07 ***Conjecture de Goldbach***

Une **conjecture** est un résultat que l'on pense vrai, mais qui n'a pas encore été démontré. C'est le cas de la conjecture de Goldbach, un vieux problème de 1742 qui n'est toujours pas résolu ! La conjecture dit que

tout nombre pair strictement plus grand que 2 peut s'écrire comme la somme de deux nombres premiers. Par exemple, 16 vérifie la conjecture, car $16 = 5 + 11$.

Trouver une telle somme pour les nombres 28, 42 et 52.

Exercice 08 ***Décomposition***

Décomposer les nombres suivants en produit de facteurs premiers :

$$30 \qquad 60 \qquad 96 \qquad 684$$

Exercice 09 ***Diviseurs d'un entier***

On peut, à partir de la décomposition en produit de facteurs premiers d'un entier naturel, trouver « facilement » le nombre et la liste de ses diviseurs.

1. Le **nombre de diviseurs** d'un entier est la somme des exposants de ses facteurs premiers, tous incrémentés de 1.
   (a) Donner la décomposition en produit de facteurs premiers de 80.
   (b) Faire la liste des exposants de chacun de ses facteurs premiers.
   (c) En déduire le nombre de diviseurs de 80.
2. Pour obtenir la **liste des diviseurs** d'un entier, on écrit tous les nombres que l'on peut former en prenant « moins de facteurs » dans sa décomposition en produit de facteurs premiers.

   Donner la liste des diviseurs de 80. On pourra faire un tableau.
3. Donner de même le nombre et la liste des diviseurs des nombres suivants :

$$30 \qquad 25 \qquad 96$$

Exercice 10 ***Plus Grand Diviseur Commun***

Déterminer le PGCD des nombres suivants :

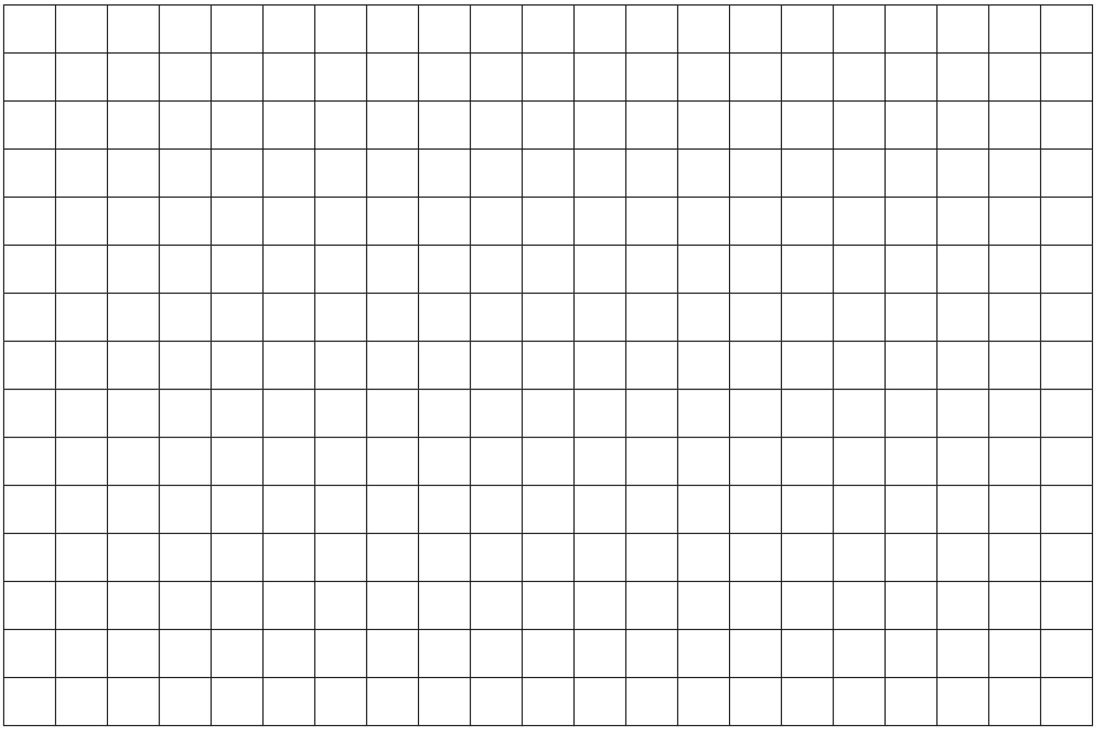
1. 198 et 256
2. 546 et 230
3. 180 et 105
4. 882 et 540
5. 0 et 298
6. 1 et 829

Exercice 11 ***Premiers entre eux ?***

1. Calculer $pgcd(63, 100)$. Que peut-on dire de ces deux nombres ?
2. Donner la décomposition en facteurs premiers de 63 et 100. Ont-ils des facteurs premiers en commun ?

Exercice 12 ***Coloriage***

On considère le quadrillage 21x15 suivant :



1. Séparer le quadrillage en deux : un carré de la plus grande dimension possible, et un rectangle.
2. Recommencer le processus sur le petit rectangle obtenu, jusqu'à ce qu'il ne reste que 2 carrés.
3. Quelle est la taille du plus petit carré obtenu ?
4. Calculer $pgcd(21, 15)$. Que remarque-t-on ?

Exercice 13 ***Indicatrice d'Euler***

Pour tout entier naturel n non nul, on note $\phi(n)$ le nombre d'entiers entre 1 et n qui sont premiers avec n.

1. Calculer $\phi(6)$ et $\phi(15)$.
2. Si p est un nombre premier, que peut-on dire de $\phi(p)$?

Exercice 14 ***Nombres parfaits***

Un **nombre parfait** est un entier naturel égal à la somme de ses diviseurs sauf lui-même (diviseurs stricts).

1. Montrer que 6 et 28 sont parfaits, mais que 12 n'est pas parfait.
2. Euclide (encore lui) a démontrer que si le nombre $M = 2^p - 1$, alors $\dfrac{M(M+1)}{2}$ est parfait !

   Donner d'autres nombres parfaits.

Exercice 15 ***Découpage optimal***

Un système informatique doit découper un fichier de taille 1800 Ko pour l'écrire sur deux types de supports :

- Le premier support accepte des blocs de 120 Ko.
- Le second support accepte des blocs de 168 Ko.

Calculer la taille maximale de bloc utilisable simultanément pour le découpage du fichier sur les deux supports (aucune fraction de bloc sur aucun support).
Préciser le nombre de blocs obtenus pour chaque support avec cette taille optimale.

Pour les programmeurs...

Exercice 16

Les entiers naturels inférieurs à 10 multiples de 3 ou de 5 sont 3,5,6 et 9. Leur somme est égale à 23.
Trouver la somme des entiers inférieurs à 1000 et multiples de 3 ou 5.

Exercice 17

Les facteurs premiers de 13195 sont 5, 7, 13 et 29.
Quel est le plus grand facteur premier du nombre 600851475143 ?

Exercice 18

2520 est le plus petit entier divisible par chacun des nombres de 1 à 10.
Quel est le plus petit entier divisible par chacun des nombres de 1 à 20 ?

Exercice 19

Les six premiers nombres premiers sont 2,3,5,7,11 et 13.
13 est donc le 6ème nombre premier.
Quel est le 10 001ème nombre premier ?

Exercice 20

La somme des nombres premiers inférieurs à 10 est égale à $2 + 3 + 5 + 7 = 17$.
Trouver la somme des nombres premiers inférieurs à 2 millions.

Pour les matheux...

Problème. *On dispose de deux verres gradués, l'un à 11cL, l'autre à 27cL.*
Peut-on, avec ces seuls verres et une quantité non limitée de liquide, mesurer exactement 1cL de liquide ?

Pour répondre à ce problème, nous allons avoir besoin d'un théorème et d'un algorithme.

> **Théorème.** *Deux entiers relatifs a et b sont **premiers entre eux** si, et seulement si, il existe deux entiers relatifs u et v tels que $au + bv = 1$.*

1. (a) Justifier que 3 et 8 sont premiers entre eux.
   (b) Donner deux entiers relatifs u et v tels que $3 \times u + 8 \times v = 1$ (un des deux sera nécessairement négatif !).
   (c) Faire de même avec 12 et 25.
2. Dans les deux cas précédents, u et v sont « faciles » à trouver, mais ce n'est pas toujours aussi simple.
   (a) Justifier que 120 et 23 sont premiers entre eux.
   (b) Peut-on trouver simplement u et v tels que $120 \times u + 23 \times v = 1$?
   (c) On peut utiliser l'algorithme suivant pour répondre à la question précédente, appelé **algorithme d'Euclide étendu** :

```python
def euclideEtendu(a,b):
  r, u, v, rr, uu, vv = a, 1, 0, b, 0, 1

  while rr > 0:
    q = r // rr
    r, u, v, rr, uu, vv = rr, uu, vv, r - q*rr, u - q*uu, v - q*vv

  return r, u, v
```

   Compléter le tableau suivant pour répondre à la question :

q	r	u	v	rr	uu	vv
-	120	1	0	23	0	1

3. Retour au problème initial
   (a) Montrer que 27 et 11 sont premiers entre eux, puis déterminer les valeurs de deux entiers u et v tels que $27 \times u + 11 \times v = 1$.
   (b) Quel lien y a-t-il entre l'égalité ainsi trouvée et le problème initial ?