

# Congruences

## Cours BTS SIO 2ème année

Année 2025/2026

## 1 Congruences

- Définition
- Propriétés
- Compatibilité avec les opérations

# Définition

Soit  $n$  un entier naturel non nul et  $a$  et  $b$  deux entiers naturels.

On dit que  $a$  et  $b$  sont congrus modulo  $n$  si les divisions euclidiennes de  $a$  et  $b$  par  $n$  donnent le **même reste**.

On écrit cela :

$$a \equiv b[n]$$

# Définition

Soit  $n$  un entier naturel non nul et  $a$  et  $b$  deux entiers naturels.

On dit que  $a$  et  $b$  sont congrus modulo  $n$  si les divisions euclidiennes de  $a$  et  $b$  par  $n$  donnent le **même reste**.

On écrit cela :

$$a \equiv b[n]$$

## Exemple

- Deux multiples de 5 sont congrus modulo 5, puisque leur reste est nul dans la division par 5 :

$$15 \equiv 20[5]$$

- Généralement,  $b$  est le reste dans la division euclidienne de  $a$  par  $n$  :

$$26 \equiv 2[6] \quad \text{car } 26 = 6 \times 4 + 2$$

## Propriété

$a \equiv b[n]$  si et seulement si  $a - b$  est un multiple de  $n$ .

## Propriété

$a \equiv b[n]$  si et seulement si  $a - b$  est un multiple de  $n$ .

## Exemple

- $42 \equiv 22[10]$  est
- $36 \equiv 4[5]$  est

## Propriété

$a \equiv b[n]$  si et seulement si  $a - b$  est un multiple de  $n$ .

## Exemple


- $42 \equiv 22[10]$  est **vraie** car  $42 - 22 = 20 = 2 \times 10$ .
- $36 \equiv 4[5]$  est **fausse** car  $36 - 4 = 32$  n'est pas un multiple de 5.

## Propriété

$a \equiv b[n]$  si et seulement si  $a - b$  est un multiple de  $n$ .

## Exemple

- $42 \equiv 22[10]$  est **vraie** car  $42 - 22 = 20 = 2 \times 10$ .
- $36 \equiv 4[5]$  est **fausse** car  $36 - 4 = 32$  n'est pas un multiple de 5.

 Exercices 1/2



# Compatibilité avec les opérations

Les congruences sont **compatibles** avec l'addition, la soustraction, la multiplication et l'exponentiation (mise à la puissance). En effet, on peut :

# Compatibilité avec les opérations

Les congruences sont **compatibles** avec l'addition, la soustraction, la multiplication et l'exponentiation (mise à la puissance). En effet, on peut :

- ajouter/soustraire un même nombre à une congruence :

$$37 \equiv 1[9] \implies 40 \equiv 4[9] \quad (+3)$$

# Compatibilité avec les opérations

Les congruences sont **compatibles** avec l'addition, la soustraction, la multiplication et l'exponentiation (mise à la puissance). En effet, on peut :

- ajouter/soustraire un même nombre à une congruence :

$$37 \equiv 1[9] \implies 40 \equiv 4[9] \quad (+3)$$

- multiplier par un même nombre à une congruence :

$$37 \equiv 1[9] \implies 74 \equiv 2[9] \quad (\times 2)$$

# Compatibilité avec les opérations

Les congruences sont **compatibles** avec l'addition, la soustraction, la multiplication et l'exponentiation (mise à la puissance). En effet, on peut :

- ajouter/soustraire un même nombre à une congruence :

$$37 \equiv 1[9] \implies 40 \equiv 4[9] \quad (+3)$$

- multiplier par un même nombre à une congruence :

$$37 \equiv 1[9] \implies 74 \equiv 2[9] \quad (\times 2)$$

- ajouter ou multiplier deux congruences *termes à termes* :

$$\begin{cases} 19 \equiv 8[11] \\ 25 \equiv 3[11] \end{cases} \implies \begin{cases} 19 + 25 = 44 \equiv 8 + 3[11] \equiv 0[11] \\ 19 \times 25 = 475 \equiv 8 \times 3[11] = 2[11] \end{cases}$$

# Compatibilité avec les opérations

Les congruences sont **compatibles** avec l'addition, la soustraction, la multiplication et l'exponentiation (mise à la puissance). En effet, on peut :

- ajouter/soustraire un même nombre à une congruence :

$$37 \equiv 1[9] \implies 40 \equiv 4[9] \quad (+3)$$

- multiplier par un même nombre à une congruence :

$$37 \equiv 1[9] \implies 74 \equiv 2[9] \quad (\times 2)$$

- ajouter ou multiplier deux congruences *termes à termes* :

$$\begin{cases} 19 \equiv 8[11] \\ 25 \equiv 3[11] \end{cases} \implies \begin{cases} 19 + 25 = 44 \equiv 8 + 3[11] \equiv 0[11] \\ 19 \times 25 = 475 \equiv 8 \times 3[11] = 2[11] \end{cases}$$

- mettre à la puissance deux congruences *termes à termes* :

$$37 \equiv 1[9] \implies 37^3 = 50653 \equiv 1^3[9] \equiv 1[9] \quad (\text{puissance } 3)$$

# Compatibilité avec les opérations

Les congruences sont **compatibles** avec l'addition, la soustraction, la multiplication et l'exponentiation (mise à la puissance). En effet, on peut :

- ajouter/soustraire un même nombre à une congruence :

$$37 \equiv 1[9] \implies 40 \equiv 4[9] \quad (+3)$$

- multiplier par un même nombre à une congruence :

$$37 \equiv 1[9] \implies 74 \equiv 2[9] \quad (\times 2)$$

- ajouter ou multiplier deux congruences *termes à termes* :

$$\begin{cases} 19 \equiv 8[11] \\ 25 \equiv 3[11] \end{cases} \implies \begin{cases} 19 + 25 = 44 \equiv 8 + 3[11] \equiv 0[11] \\ 19 \times 25 = 475 \equiv 8 \times 3[11] = 2[11] \end{cases}$$

- mettre à la puissance deux congruences *termes à termes* :

$$37 \equiv 1[9] \implies 37^3 = 50653 \equiv 1^3[9] \equiv 1[9] \quad (\text{puissance } 3)$$

 Exercices 3/4