

Congruences

Cours BTS SIO 2ème année

Année 2025/2026

Plan du cours

1 Congruences

- Définition
- Propriétés
- Compatibilité avec les opérations

Définition

Soit n un entier naturel non nul et a et b deux entiers naturels.

On dit que a et b sont congrus modulo n si les divisions euclidiennes de a et b par n donnent le **même reste**.

On écrit cela :

$$a \equiv b[n]$$

Définition

Soit n un entier naturel non nul et a et b deux entiers naturels.

On dit que a et b sont congrus modulo n si les divisions euclidiennes de a et b par n donnent le **même reste**.

On écrit cela :

$$a \equiv b[n]$$

Exemple

- Deux multiples de 5 sont congrus modulo 5, puisque leur reste est nul dans la division par 5 :

$$15 \equiv 20[5]$$

- Généralement, b est le reste dans la division euclidienne de a par n :

$$26 \equiv 2[6] \quad \text{car } 26 = 6 \times 4 + 2$$

Propriétés

Propriété

$a \equiv b[n]$ si et seulement si $a - b$ est un multiple de n .

Propriétés

Propriété

$a \equiv b[n]$ si et seulement si $a - b$ est un multiple de n .

Exemple

- $42 \equiv 22[10]$ est
- $36 \equiv 4[5]$ est

Propriétés

Propriété

$a \equiv b[n]$ si et seulement si $a - b$ est un multiple de n .

Exemple

- $42 \equiv 22[10]$ est **vraie** car $42 - 22 = 20 = 2 \times 10$.
- $36 \equiv 4[5]$ est **fausse** car $36 - 4 = 32$ n'est pas un multiple de 5.

Propriétés

Propriété

$a \equiv b[n]$ si et seulement si $a - b$ est un multiple de n .

Exemple

- $42 \equiv 22[10]$ est **vraie** car $42 - 22 = 20 = 2 \times 10$.
- $36 \equiv 4[5]$ est **fausse** car $36 - 4 = 32$ n'est pas un multiple de 5.



Exercices 1/2

Compatibilité avec les opérations

Les congruences sont **compatibles** avec l'addition, la soustraction, la multiplication et l'exponentiation (mise à la puissance). En effet, on peut :

Compatibilité avec les opérations

Les congruences sont **compatibles** avec l'addition, la soustraction, la multiplication et l'exponentiation (mise à la puissance). En effet, on peut :

- ajouter/soustraire un même nombre à une congruence :

$$37 \equiv 1[9] \implies 40 \equiv 4[9] \quad (+3)$$

Compatibilité avec les opérations

Les congruences sont **compatibles** avec l'addition, la soustraction, la multiplication et l'exponentiation (mise à la puissance). En effet, on peut :

- ajouter/soustraire un même nombre à une congruence :

$$37 \equiv 1[9] \implies 40 \equiv 4[9] \quad (+3)$$

- multiplier par un même nombre à une congruence :

$$37 \equiv 1[9] \implies 74 \equiv 2[9] \quad (\times 2)$$

Compatibilité avec les opérations

Les congruences sont **compatibles** avec l'addition, la soustraction, la multiplication et l'exponentiation (mise à la puissance). En effet, on peut :

- ajouter/soustraire un même nombre à une congruence :

$$37 \equiv 1[9] \implies 40 \equiv 4[9] \quad (+3)$$

- multiplier par un même nombre à une congruence :

$$37 \equiv 1[9] \implies 74 \equiv 2[9] \quad (\times 2)$$

- ajouter ou multiplier deux congruences *termes à termes* :

$$\begin{cases} 19 \equiv 8[11] \\ 25 \equiv 3[11] \end{cases} \implies \begin{cases} 19 + 25 = 44 \equiv 8 + 3[11] \equiv 0[11] \\ 19 \times 25 = 475 \equiv 8 \times 3[11] = 2[11] \end{cases}$$

Compatibilité avec les opérations

Les congruences sont **compatibles** avec l'addition, la soustraction, la multiplication et l'exponentiation (mise à la puissance). En effet, on peut :

- ajouter/soustraire un même nombre à une congruence :

$$37 \equiv 1[9] \implies 40 \equiv 4[9] \quad (+3)$$

- multiplier par un même nombre à une congruence :

$$37 \equiv 1[9] \implies 74 \equiv 2[9] \quad (\times 2)$$

- ajouter ou multiplier deux congruences *termes à termes* :

$$\begin{cases} 19 \equiv 8[11] \\ 25 \equiv 3[11] \end{cases} \implies \begin{cases} 19 + 25 = 44 \equiv 8 + 3[11] \equiv 0[11] \\ 19 \times 25 = 475 \equiv 8 \times 3[11] = 2[11] \end{cases}$$

- mettre à la puissance deux congruences *termes à termes* :

$$37 \equiv 1[9] \implies 37^3 = 50653 \equiv 1^3[9] \equiv 1[9] \quad (\text{puissance 3})$$

Compatibilité avec les opérations

Les congruences sont **compatibles** avec l'addition, la soustraction, la multiplication et l'exponentiation (mise à la puissance). En effet, on peut :

- ajouter/soustraire un même nombre à une congruence :

$$37 \equiv 1[9] \implies 40 \equiv 4[9] \quad (+3)$$

- multiplier par un même nombre à une congruence :

$$37 \equiv 1[9] \implies 74 \equiv 2[9] \quad (\times 2)$$

- ajouter ou multiplier deux congruences *termes à termes* :

$$\begin{cases} 19 \equiv 8[11] \\ 25 \equiv 3[11] \end{cases} \implies \begin{cases} 19 + 25 = 44 \equiv 8 + 3[11] \equiv 0[11] \\ 19 \times 25 = 475 \equiv 8 \times 3[11] = 2[11] \end{cases}$$

- mettre à la puissance deux congruences *termes à termes* :

$$37 \equiv 1[9] \implies 37^3 = 50653 \equiv 1^3[9] \equiv 1[9] \quad (\text{puissance 3})$$



Exercices 3/4