

Exercices : Logique propositionnelle

Exercice 01 *Ceci n'est pas une proposition*

Parmi les énoncés suivants, dire si ce sont des propositions :

1. « $1 + 1 = 10$ »
2. « 3773 est un nombre premier »
3. « Taisez-vous ! »
4. « Il pleut »
5. « Tous les nombres premiers sont impairs »
6. « Cette proposition est fausse »

Exercice 02 *Connecteurs logiques*

On note P et Q les affirmations suivantes :

$$P = \text{« Paul aime le foot »} \quad Q = \text{« Paul aime les maths »}$$

Représenter les affirmations suivantes sous forme symbolique en utilisant P, Q et des connecteurs logiques.

- A : « Paul aime le foot mais pas les maths »
- B : « Paul n'aime ni le foot, ni les maths »
- C : « Paul aime le foot ou il aime les maths et pas le foot »
- D : « Paul aime les maths et le foot ou il aime les maths mais pas le foot »

Exercice 03 *Vrai ou Faux ?*

Donner les valeurs de vérité des propositions suivantes :

- A : $(\pi = 5) \wedge (2 + 3 = 5)$
- B : $(\pi = 5) \vee (2 + 3 = 5)$
- C : $(\pi = 3,14) \Rightarrow (5 + 6 = 11)$
- D : $(\pi = 5) \Rightarrow (2 + 3 = 5)$
- E : $(4 = 5) \Rightarrow A$
- F : $(5 + 5 = 10) \Leftrightarrow (\pi = 11)$

Exercice 04 *Équivalence et double implication*

Vérifier que la table de vérité de $P \Leftrightarrow Q$ est la même que celle de $(P \Rightarrow Q) \wedge (Q \Rightarrow P)$.

Exercice 05 *Ou exclusif*

L'opérateur binaire *XOR*, encore appelé *OU exclusif*, est noté \oplus . Étant données deux propositions P et Q, $P \oplus Q$ est vraie si et seulement si une et une seule des propositions P ou Q est vraie.

1. Donner la table de vérité de *XOR*.
2. Vérifier que c'est la même que $(P \wedge \overline{Q}) \vee (\overline{P} \wedge Q)$.
3. Vérifier que c'est la même que $(P \vee Q) \wedge (\overline{P} \wedge \overline{Q})$.

Exercice 06 *Lois de De Morgan*

Soient P et Q deux propositions.

1. Montrer que $\overline{P \wedge Q} \Leftrightarrow \overline{P} \vee \overline{Q}$
2. Donner la négation de la phrase « Jean est beau et grand »
3. Montrer que $\overline{P \vee Q} \Leftrightarrow \overline{P} \wedge \overline{Q}$
4. Donner la négation de la phrase « J'adore les bonbons bleus ou rouges »

Exercice 07 *Simplification*

1. Établir la table de vérité de la proposition $(P \Rightarrow Q) \Rightarrow (P \vee Q)$
2. À quelle proposition plus simple cette proposition est-elle équivalente ?

Exercice 08 *Contraposée*

La contraposée d'une implication $P \Rightarrow Q$ est $\overline{Q} \Rightarrow \overline{P}$.

1. Montrer que $P \Rightarrow Q$ et $\overline{Q} \Rightarrow \overline{P}$ sont logiquement équivalentes.
2. Dans chaque cas, donner une phrase logiquement équivalente en utilisant la contraposée :
 - (a) « S'il pleut, alors il y a des nuages »
 - (b) « Si un triangle ABC est rectangle en A, alors $AB^2 + AC^2 = BC^2$ »
 - (c) « J'habite à Ajaccio, donc j'habite en Corse »
 - (d) « Vous êtes garés ici, donc vous êtes au bar »

Exercice 09 *Quantificateurs et négation*

Les propositions suivantes sont-elles vraies ? Sinon, énoncer leur négation.

1. $\exists n \in \mathbb{N}, 3n = 4$
2. $\exists n \in \mathbb{N}, n^2 \geqslant 5$
3. $\forall n \in \mathbb{N}, n^2 \geqslant 10$
4. $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 \neq x$
5. $\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}, x \times y = 0$
6. $\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}, x \times y = 1$

Exercice 10 *Il existe une proposition vraie*

Pour chacune des propositions suivantes, dire si elle est vraie ou fausse, en justifiant.

1. $\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, x + y \geqslant 0$
2. $\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}, x + y \geqslant 0$
3. $\exists x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, x + y \geqslant 0$