Logique Propositionnelle

Cours BTS SIO 2ème année

Année 2025/2026

Plan du cours

1. Notion de proposition
2. Connecteurs logiques
   - Négation
   - Conjonction
   - Disjonction
   - Implication
   - Équivalence
3. Prédicats
   - Prédicat + Quantificateur = Proposition
   - Négation des quantificateurs

Notion de proposition

Une **proposition** est un énoncé qui a un sens et pour lequel on peut dire avec certitude qu'il est vrai ou faux.

On dit qu'on peut lui associer une valeur de vérité. Cette valeur peut se noter *Vrai* ou *Faux* mais on peut aussi choisir de la noter 0 (pour faux) ou 1 (pour vrai).

Notion de proposition

Une **proposition** est un énoncé qui a un sens et pour lequel on peut dire avec certitude qu'il est vrai ou faux.

On dit qu'on peut lui associer une valeur de vérité. Cette valeur peut se noter *Vrai* ou *Faux* mais on peut aussi choisir de la noter 0 (pour faux) ou 1 (pour vrai).

Exemples :

- « $2 + 7 = 9$ » est une proposition (elle est vraie).
- « Ajaccio est une ville de Haute-Corse » est une proposition (elle est fausse).
- « Je suis plus grand » et « Cette phrase est fausse » ne sont pas des propositions.

Négation

La **négation** d'une proposition P, notée $\overline{\mathrm{P}}$ ou $\neg$P, est la proposition dont la table de vérité est la suivante :

P	$\overline{\mathrm{P}}$
0	1
1	0

Négation

La **négation** d'une proposition P, notée $\overline{P}$ ou $\neg P$, est la proposition dont la table de vérité est la suivante :

P	$\overline{P}$
0	1
1	0

Remarques :

- Si P est vraie, alors $\neg P$ est fausse et inversement
- $\neg(\neg P)$ et P ont même valeur de vérité

Conjonction

La **conjonction** (*ET* logique) de deux propositions P et Q, notée $P \wedge Q$, est la proposition qui n'est vraie que si P **et** Q sont vraies toutes les deux.

P	Q	$P \wedge Q$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Conjonction

La **conjonction** (*ET* logique) de deux propositions P et Q, notée $P \wedge Q$, est la proposition qui n'est vraie que si P **et** Q sont vraies toutes les deux.

P	Q	$P \wedge Q$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Exemple :

- P : « $1 + 1 = 2$ »
- Q : « $2 \times 2 = 5$ »
- La conjonction $P \wedge Q$ est

Conjonction

La **conjonction** (*ET* logique) de deux propositions P et Q, notée $P \wedge Q$, est la proposition qui n'est vraie que si P **et** Q sont vraies toutes les deux.

P	Q	$P \wedge Q$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Exemple :

- P : « $1 + 1 = 2$ »
- Q : « $2 \times 2 = 5$ »
- La conjonction $P \wedge Q$ est fausse (car Q est fausse)

Disjonction

La **disjonction** (*OU* logique) de deux propositions P et Q, notée P∨Q, est la proposition qui est vraie si P est vraie **ou** Q est vraie.

P	Q	P∨Q
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

Disjonction

La **disjonction** (*OU* logique) de deux propositions P et Q, notée P$\vee$Q, est la proposition qui est vraie si P est vraie **ou** Q est vraie.

P	Q	P$\vee$Q
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

Exemple :

- P : « $1 + 1 = 2$ »
- Q : « $2 \times 2 = 5$ »
- La disjonction P$\vee$Q est

Disjonction

La **disjonction** (*OU* logique) de deux propositions P et Q, notée P∨Q, est la proposition qui est vraie si P est vraie **ou** Q est vraie.

P	Q	P∨Q
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

Exemple :

- P : « $1 + 1 = 2$ »
- Q : « $2 \times 2 = 5$ »
- La disjonction P∨Q est vraie (car P est vraie)

Implication

L'**implication** logique de deux propositions P et Q (dans cet ordre), notée P $\Rightarrow$ Q, est la proposition qui n'est fausse que si P est vraie et Q est fausse.

P	Q	P $\Rightarrow$ Q
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

Implication

L'**implication** logique de deux propositions P et Q (dans cet ordre), notée P $\Rightarrow$ Q, est la proposition qui n'est fausse que si P est vraie et Q est fausse.

P	Q	P $\Rightarrow$ Q
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

Exemple :

- P : « J'habite à Ajaccio »
- Q : « J'habite en Corse »
- L'implication P $\Rightarrow$ Q est

Implication

L'**implication** logique de deux propositions P et Q (dans cet ordre), notée P $\Rightarrow$ Q, est la proposition qui n'est fausse que si P est vraie et Q est fausse.

P	Q	P $\Rightarrow$ Q
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

Exemple :

- P : « J'habite à Ajaccio »
- Q : « J'habite en Corse »
- L'implication P $\Rightarrow$ Q est vraie

Équivalence

L'**équivalence** logique de deux propositions P et Q, notée P $\Leftrightarrow$ Q, est la proposition qui n'est vraie que si P et Q ont la même valeur de vérité.

P	Q	P $\Leftrightarrow$ Q
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Équivalence

L'**équivalence** logique de deux propositions P et Q, notée P $\Leftrightarrow$ Q, est la proposition qui n'est vraie que si P et Q ont la même valeur de vérité.

P	Q	P $\Leftrightarrow$ Q
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Exemple :

- P : « J'habite à Ajaccio »
- Q : « J'habite en Corse »
- L'équivalence P $\Leftrightarrow$ Q est

Équivalence

L'**équivalence** logique de deux propositions P et Q, notée P $\Leftrightarrow$ Q, est la proposition qui n'est vraie que si P et Q ont la même valeur de vérité.

P	Q	P $\Leftrightarrow$ Q
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Exemple :

- P : « J'habite à Ajaccio »
- Q : « J'habite en Corse »
- L'équivalence P $\Leftrightarrow$ Q est fausse (car P peut être fausse et Q vraie)

Équivalence

Méthode

Deux propositions composées sont équivalentes si elles ont la même table de vérité.

Équivalence

Méthode

Deux propositions composées sont équivalentes si elles ont la même table de vérité.

Exemple : $(P \Rightarrow Q) \Leftrightarrow \overline{P} \vee Q$

Équivalence

Méthode

Deux propositions composées sont équivalentes si elles ont la même table de vérité.

Exemple : $(P \Rightarrow Q) \;\Leftrightarrow\; \overline{P} \vee Q$

P	Q	$P \Rightarrow Q$	$\overline{P} \vee Q$
0	0	1	1
0	1	1	1
1	0	0	0
1	1	1	1

Prédicats : un peu de vocabulaire

- Le symbole $\forall$ se lit « pour tout » et s'appelle **quantificateur universel**

Prédicats : un peu de vocabulaire

- Le symbole $\forall$ se lit « pour tout » et s'appelle **quantificateur universel**
- Le symbole $\exists$ se lit « il existe » et s'appelle **quantificateur existentiel**

Prédicats : un peu de vocabulaire

- Le symbole $\forall$ se lit « pour tout » et s'appelle **quantificateur universel**
- Le symbole $\exists$ se lit « il existe » et s'appelle **quantificateur existentiel**
- Une **variable** est un symbole qui peut prendre plusieurs valeurs.

Prédicats : un peu de vocabulaire

- Le symbole $\forall$ se lit « pour tout » et s'appelle **quantificateur universel**
- Le symbole $\exists$ se lit « il existe » et s'appelle **quantificateur existentiel**
- Une **variable** est un symbole qui peut prendre plusieurs valeurs.

Définition

Un **prédicat** est un énoncé sans valeur de vérité qui contient au moins une variable, et qui devient une proposition en ajoutant un ou des quantificateurs.

Prédicats : exemples

Exemples de prédicats :

- $x \geq 0$
- $x^2 \geq 0$

Prédicats : exemples

Exemples de prédicats :

- $x \geq 0$
- $x^2 \geq 0$

Exemples de propositions associées :

- $\forall x \in \mathbb{R}, \quad x \geq 0$
- $\forall x \in \mathbb{R}, \quad x^2 \geq 0$
- $\exists x \in \mathbb{R}, \quad x \geq 0$
- $\exists x \in \mathbb{R}, \quad x^2 \geq 0$

Prédicats : exemples

Exemples de prédicats :

- $x \geq 0$
- $x^2 \geq 0$

Exemples de propositions associées :

- $\forall x \in \mathbb{R}, \quad x \geq 0$: FAUX
- $\forall x \in \mathbb{R}, \quad x^2 \geq 0$: VRAI
- $\exists x \in \mathbb{R}, \quad x \geq 0$: VRAI
- $\exists x \in \mathbb{R}, \quad x^2 \geq 0$: VRAI

Négation des quantificateurs

Si E est un ensemble et p un prédicat, alors :

- $\neg(\forall x \in E, p(x)) \Leftrightarrow (\exists x \in E, \neg p(x))$
- $\neg(\exists x \in E, p(x)) \Leftrightarrow (\forall x \in E, \neg p(x))$

Négation des quantificateurs

Si E est un ensemble et p un prédicat, alors :

- $\neg(\forall x \in E, p(x)) \Leftrightarrow (\exists x \in E, \neg p(x))$
- $\neg(\exists x \in E, p(x)) \Leftrightarrow (\forall x \in E, \neg p(x))$

Exemples : E désigne l'ensemble des élèves d'une classe.

- La négation de « Tous les élèves de la classe sont punis » est :
- La négation de « Il existe un élève dans la classe qui est une fille » est :

Négation des quantificateurs

Si E est un ensemble et p un prédicat, alors :

- $\neg(\forall x \in E, p(x)) \Leftrightarrow (\exists x \in E, \neg p(x))$
- $\neg(\exists x \in E, p(x)) \Leftrightarrow (\forall x \in E, \neg p(x))$

Exemples : E désigne l'ensemble des élèves d'une classe.

- La négation de « Tous les élèves de la classe sont punis » est :
  « Il existe un élève de la classe qui n'est pas puni »
- La négation de « Il existe un élève dans la classe qui est une fille » est :

Négation des quantificateurs

Si E est un ensemble et p un prédicat, alors :

- $\neg(\forall\, x \in E, p(x)) \Leftrightarrow (\exists\, x \in E, \neg p(x))$
- $\neg(\exists\, x \in E, p(x)) \Leftrightarrow (\forall\, x \in E, \neg p(x))$

Exemples : E désigne l'ensemble des élèves d'une classe.

- La négation de « Tous les élèves de la classe sont punis » est : « Il existe un élève de la classe qui n'est pas puni »
- La négation de « Il existe un élève dans la classe qui est une fille » est : « Tous les élèves de la classe sont des garçons »