Calcul ensembliste

Cours BTS SIO 2ème année

Année 2025/2026

Plan du cours

Définitions

- Un **ensemble** désigne une collection d'objets, qui sont appelés les **éléments** de l'ensemble. Un ensemble fini se note entre accolades.

Notion d'ensemble

Définitions

- Un **ensemble** désigne une collection d'objets, qui sont appelés les **éléments** de l'ensemble. Un ensemble fini se note entre accolades.
- Pour tout ensemble E, si x est un élément de E, on dit que x **appartient** à E et on note $x \in E$.

Notion d'ensemble

Définitions

- Un **ensemble** désigne une collection d'objets, qui sont appelés les **éléments** de l'ensemble. Un ensemble fini se note entre accolades.
- Pour tout ensemble E, si x est un élément de E, on dit que x **appartient** à E et on note $x \in E$.
- Si le nombre d'éléments de E est fini, on appelle **cardinal** de E le nombre d'éléments qui le compose. On le note $Card(E)$.

Notion d'ensemble

Définitions

- Un **ensemble** désigne une collection d'objets, qui sont appelés les **éléments** de l'ensemble. Un ensemble fini se note entre accolades.
- Pour tout ensemble E, si x est un élément de E, on dit que x **appartient** à E et on note $x \in E$.
- Si le nombre d'éléments de E est fini, on appelle **cardinal** de E le nombre d'éléments qui le compose. On le note $Card(E)$.
- On dit qu'un ensemble A est **inclus** dans un ensemble B si tous les éléments de A sont également dans B. On note alors $A \subset B$.

Notion d'ensemble

Définitions

- Un **ensemble** désigne une collection d'objets, qui sont appelés les **éléments** de l'ensemble. Un ensemble fini se note entre accolades.
- Pour tout ensemble E, si x est un élément de E, on dit que x **appartient** à E et on note $x \in E$.
- Si le nombre d'éléments de E est fini, on appelle **cardinal** de E le nombre d'éléments qui le compose. On le note $Card(E)$.
- On dit qu'un ensemble A est **inclus** dans un ensemble B si tous les éléments de A sont également dans B. On note alors $A \subset B$.
- L'**ensemble vide** est l'ensemble ne contenant aucun élément.
  On le note $\emptyset$.

Exemple

$E = \{1; 2; 8; 10\}$ $\qquad F = \{2; 8\}$ $\qquad G = \mathbb{N}$

E et F sont deux ensembles finis.

E est de cardinal 4. F est de cardinal 2.

G est un ensemble infini.

$F \subset E \subset G$

Notion d'ensemble

Définition

Si E est un ensemble, on note $P(E)$ l'**ensemble des parties** de E, c'est à dire l'ensemble des sous ensembles de E.

Définition

Si E est un ensemble, on note $P(E)$ l'**ensemble des parties** de E, c'est à dire l'ensemble des sous ensembles de E.

Exemple

$E = \{a; b; c\}$

$P(E) = \{ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \}$

Notion d'ensemble

Définition

Si E est un ensemble, on note $P(E)$ l'**ensemble des parties** de E, c'est à dire l'ensemble des sous ensembles de E.

Exemple

$E = \{a; b; c\}$
$P(E) = \{\emptyset; \{a\}\,; \{b\}\,; \{c\}\,; \{a; b\}\,; \{a; c\}\,; \{b; c\}\,\{a; b; c\}\,\}$

Notion d'ensemble

Propriété

Soit E un ensemble fini de cardinal n. Alors $Card(P(E)) = 2^n$.

Notion d'ensemble

Propriété

Soit E un ensemble fini de cardinal n. Alors $Card(P(E)) = 2^n$.

Exemple

Dans une classe de 15 élèves, combien de groupes d'élèves peut-on former ?

Propriété

Soit E un ensemble fini de cardinal n. Alors $Card(P(E)) = 2^n$.

Exemple

Dans une classe de 15 élèves, combien de groupes d'élèves peut-on former ?

Un groupe est une partie de l'ensemble des élèves : il en existe $2^{15} = 32768$.

Union

Définition

L'**union** de deux ensembles A et B (tous deux inclus dans un ensemble E) est notée A ∪ B : c'est l'ensemble des éléments appartenant à **au moins l'un des deux ensembles** A et B.

$$A \cup B = \{x \in E \,, (x \in A) \vee (x \in B)\}$$

Union

Définition

L'**union** de deux ensembles A et B (tous deux inclus dans un ensemble E) est notée A ∪ B : c'est l'ensemble des éléments appartenant à **au moins l'un des deux ensembles** A et B.

$$A \cup B = \{x \in E\,, (x \in A) \vee (x \in B)\}$$

Exemple

$$A = \{2; 3; 4\} \qquad B = \{4; 5; 6\}$$

$$A \cup B = \{ \qquad\qquad\qquad \}$$

Union

Définition

L'**union** de deux ensembles A et B (tous deux inclus dans un ensemble E) est notée A ∪ B : c'est l'ensemble des éléments appartenant à **au moins l'un des deux ensembles** A et B.

$$A \cup B = \{x \in E\,, (x \in A) \vee (x \in B)\}$$

Exemple

$$A = \{2; 3; 4\} \quad B = \{4; 5; 6\}$$

$$A \cup B = \{2; 3; 4; 5; 6\}$$

Intersection

Définition

L'**intersection** de deux ensembles A et B (tous deux inclus dans un ensemble E) est notée A $\cap$ B : c'est l'ensemble des éléments **communs aux deux ensembles** A et B.

$$A \cap B = \{x \in E\,, (x \in A) \wedge (x \in B)\}$$

Intersection

Définition

L'**intersection** de deux ensembles A et B (tous deux inclus dans un ensemble E) est notée A ∩ B : c'est l'ensemble des éléments **communs aux deux ensembles** A et B.

$$A \cap B = \{x \in E\,, (x \in A) \wedge (x \in B)\}$$

Exemple

$$A = \{2; 3; 4\} \quad B = \{4; 5; 6\}$$

$$A \cap B = \{\ \ \}$$

Intersection

Définition

L'**intersection** de deux ensembles A et B (tous deux inclus dans un ensemble E) est notée A ∩ B : c'est l'ensemble des éléments **communs aux deux ensembles** A et B.

$$A \cap B = \{x \in E\,, (x \in A) \wedge (x \in B)\}$$

Exemple

$$A = \{2; 3; 4\} \quad B = \{4; 5; 6\}$$

$$A \cap B = \{4\}$$

Complémentaire

Définition

Le **complémentaire** d'un ensemble A (inclus dans un ensemble E) est noté $\overline{\mathrm{A}}$: c'est l'ensemble des **éléments de E qui n'appartiennent pas à A**.

$$\overline{\mathrm{A}} = \{x \in E \,, \neg(x \in A)\}$$

Complémentaire

Définition

Le **complémentaire** d'un ensemble A (inclus dans un ensemble E) est noté $\overline{\mathrm{A}}$: c'est l'ensemble des **éléments de E qui n'appartiennent pas à A**.

$$\overline{\mathrm{A}} = \{x \in E \, , \neg(x \in A)\}$$

Exemple

$$E = \{1; 2; 3; 4; 5\} \quad A = \{2; 3\}$$

$$\overline{A} = \{ \qquad \}$$

Complémentaire

Définition

Le **complémentaire** d'un ensemble A (inclus dans un ensemble E) est noté $\overline{\text{A}}$: c'est l'ensemble des **éléments de E qui n'appartiennent pas à A**.

$$\overline{\text{A}} = \{x \in E \,, \neg(x \in A)\}$$

Exemple

$$E = \{1; 2; 3; 4; 5\} \quad A = \{2; 3\}$$

$$\overline{A} = \{1; 4; 5\}$$

Propriétés

Soit E un ensemble. Soit A une partie de E.

- $A \cup \overline{A} =$
- $A \cap \overline{A} =$
- $E \cup A =$
- $\emptyset \cup A =$
- $E \cap A =$
- $\emptyset \cap A =$

Propriétés

Soit E un ensemble. Soit A une partie de E.

- $A \cup \overline{A} = E$
- $A \cap \overline{A} =$
- $E \cup A =$
- $\emptyset \cup A =$
- $E \cap A =$
- $\emptyset \cap A =$

Opérations sur les ensembles

Propriétés

Soit E un ensemble. Soit A une partie de E.

- $A \cup \overline{A} = E$
- $A \cap \overline{A} = \emptyset$
- $E \cup A =$
- $\emptyset \cup A =$
- $E \cap A =$
- $\emptyset \cap A =$

Propriétés

Soit E un ensemble. Soit A une partie de E.

- $A \cup \overline{A} = E$
- $A \cap \overline{A} = \emptyset$
- $E \cup A = E$ (E *absorbant* pour $\cup$)
- $\emptyset \cup A =$
- $E \cap A =$
- $\emptyset \cap A =$

Propriétés

Soit E un ensemble. Soit A une partie de E.

- $A \cup \overline{A} = E$
- $A \cap \overline{A} = \emptyset$
- $E \cup A = E$ (E *absorbant* pour $\cup$)
- $\emptyset \cup A = A$ ($\emptyset$ *neutre* pour $\cup$)
- $E \cap A =$
- $\emptyset \cap A =$

Propriétés

Soit E un ensemble. Soit A une partie de E.

- $A \cup \overline{A} = E$
- $A \cap \overline{A} = \emptyset$
- $E \cup A = E$ (E *absorbant* pour $\cup$)
- $\emptyset \cup A = A$ ($\emptyset$ *neutre* pour $\cup$)
- $E \cap A = A$ (E *neutre* pour $\cap$)
- $\emptyset \cap A =$

Opérations sur les ensembles

Propriétés

Soit E un ensemble. Soit A une partie de E.

- $A \cup \overline{A} = E$
- $A \cap \overline{A} = \emptyset$
- $E \cup A = E$ (E *absorbant* pour $\cup$)
- $\emptyset \cup A = A$ ($\emptyset$ *neutre* pour $\cup$)
- $E \cap A = A$ (E *neutre* pour $\cap$)
- $\emptyset \cap A = \emptyset$ ($\emptyset$ *absorbant* pour $\cap$)

Propriétés

Soit E un ensemble. Soient A, B et C trois parties de E.

- Associativité :
- Commutativité :
- Distributivité :
- Loi de De Morgan :

Opérations sur les ensembles

Propriétés

Soit E un ensemble. Soient A, B et C trois parties de E.

- Associativité :
  - $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$
  - $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$
- Commutativité :
- Distributivité :
- Loi de De Morgan :

Opérations sur les ensembles

Propriétés

Soit E un ensemble. Soient A, B et C trois parties de E.

- Associativité :
  - $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$
  - $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$
- Commutativité :
  - $A \cup B = B \cup A$
  - $A \cap B = B \cap A$
- Distributivité :
- Loi de De Morgan :

Propriétés

Soit E un ensemble. Soient A, B et C trois parties de E.

- Associativité :
  - $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$
  - $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$
- Commutativité :
  - $A \cup B = B \cup A$
  - $A \cap B = B \cap A$
- Distributivité : $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
- Loi de De Morgan :

Opérations sur les ensembles

Propriétés

Soit E un ensemble. Soient A, B et C trois parties de E.

- Associativité :
  - $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$
  - $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$
- Commutativité :
  - $A \cup B = B \cup A$
  - $A \cap B = B \cap A$
- Distributivité : $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
- Loi de De Morgan :
  - $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$
  - $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$