

## Exercices : Algèbres de Boole

### Exercice 01 *Calcul booléen*

Soit  $(E, +, \cdot, -)$  une algèbre de Boole. Montrer que pour tous éléments  $a, b$  et  $c$  :

1.  $a \cdot (\bar{a} + b) = a \cdot b$
2.  $(a + \bar{b}) \cdot (\bar{a} + b) = a \cdot b + \bar{a} \cdot \bar{b}$
3.  $a + \bar{a} \cdot b = a + b$
4.  $(a + b) \cdot (\bar{a} + c) \cdot (\bar{b} + \bar{c}) = a \cdot \bar{b} \cdot c + \bar{a} \cdot b \cdot \bar{c}$

### Exercice 02 *Loi d'absorption*

Soit  $(E, +, \cdot, -)$  une algèbre de Boole. Montrer que pour tous éléments  $a$ , et  $b$  :

$$a + ab = a$$

### Exercice 03 *De Morgan*

Simplifier les expressions suivantes :

1.  $\overline{a + \bar{b}}$
2.  $\overline{\bar{a} \cdot \bar{b}}$
3.  $\overline{a + \bar{b} + \bar{a}}$
4.  $\overline{(a + \bar{b}) \cdot a \cdot \bar{b}}$

### Exercice 04 Donner les expressions logiques des tableaux de Karnaugh suivants :

a \ b	0	1
	0	1
0	0	0
1	1	0

a \ b	0	1
	0	1
0	0	1
1	1	0

a \ b	0	1
	0	1
0	1	1
1	0	0

### Exercice 05 Donner les tableaux de Karnaugh associés aux expressions suivantes, et les simplifier si possible :

1.  $a \cdot b$
2.  $a \cdot \bar{b} + \bar{a} \cdot \bar{b}$
3.  $\bar{a} \cdot \bar{b} + \bar{a} \cdot b + a \cdot \bar{b}$
4.  $a + b + a \cdot b$

### Exercice 06 Donner les expressions logiques des tableaux de Karnaugh suivants :

a \ bc	00	01	11	10
	0	1	0	0
0	1	0	0	0
1	0	0	0	1

a \ bc	00	01	11	10
	0	1	0	1
0	0	1	0	1
1	0	0	1	0

a \ bc	00	01	11	10
	0	1	0	1
0	0	1	0	1
1	0	1	0	0

**Exercice 07** Donner les expressions logiques simplifiées des tableaux de Karnaugh suivants :

$\begin{array}{c c} & bc \\ \hline a & \end{array}$	00	01	11	10
0	1	1	0	1
1	0	0	0	1

$\begin{array}{c c} & bc \\ \hline a & \end{array}$	00	01	11	10
0	0	1	1	1
1	0	1	1	0

$\begin{array}{c c} & bc \\ \hline a & \end{array}$	00	01	11	10
0	1	0	0	1
1	0	0	0	0

$\begin{array}{c c} & bc \\ \hline a & \end{array}$	00	01	11	10
0	1	1	1	1
1	0	0	0	1

$\begin{array}{c c} & bc \\ \hline a & \end{array}$	00	01	11	10
0	1	0	0	1
1	0	1	1	0

$\begin{array}{c c} & bc \\ \hline a & \end{array}$	00	01	11	10
0	1	0	0	1
1	1	1	0	1

**Exercice 08** Simplifier les expressions suivantes à l'aide d'un tableau de Karnaugh :

1.  $a.b.\bar{c} + \bar{a}.\bar{b}.c + a.\bar{b}.\bar{c} + a.\bar{b}.c$

2.  $a.b.c + \bar{a}.b.c + \bar{a}.\bar{b}.c + a.b.\bar{c}$

**Exercice 09** Chaque page d'un site web comprend 4 questions, qui peuvent rapporter des points ou en faire perdre. Un utilisateur peut accéder à une page suivante lorsque l'une au moins des conditions suivantes est satisfaite :

- l'utilisateur a répondu correctement à 3 questions au minimum
- l'utilisateur a répondu correctement à strictement moins de 3 questions et a marqué 5 points au minimum sur la page
- l'utilisateur a marqué strictement moins de 5 points sur la page et il est titulaire du BTS SIO

On définit les variables booléennes suivantes :

- $a = 1$  si l'utilisateur a répondu correctement à 3 questions au minimum,  $a = 0$  sinon
- $b = 1$  si l'utilisateur a marqué 5 points au minimum,  $b = 0$  sinon
- $c = 1$  si l'utilisateur est titulaire du BTS SIO,  $c = 0$  sinon

1. Écrire une expression booléenne  $F$  traduisant les conditions permettant à un utilisateur de passer à une page suivante.
2. À l'aide d'un tableau de Karnaugh, déterminer une écriture simplifiée de  $F$ .
3. Écrire sous forme d'une phrase, les conditions pour lesquelles un utilisateur ne peut pas accéder à une page suivante.