Exercices : Éléments de la théorie des ensembles

Exercice 01 ***Produit cartésien***

On considère les ensembles $E = \{a; b\}$ et $F = \{c; d\}$. Déterminer les produits cartésiens suivants :

1. $E \times F$
2. $F \times E$
3. $E^2 = E \times E$
4. $F^2 = F \times F$
5. $E \times F \times E$

Exercice 02 ***Mot de passe***

On considère les ensembles $E = \{a; b; c; d\}$ et $F = \{0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9\}$.

1. Soit $A = E \times E$.
   (a) Donner deux éléments de A.
   (b) Quel est le cardinal de A ?
2. Soit $B = F \times F \times F$.
   (a) Donner deux éléments de B.
   (b) Quel est le cardinal de B ?
3. On appelle **mot de passe** tout élément de l'ensemble $A \times B \times A$.
   (a) Donner deux exemples de mots de passe.
   (b) Combien existe-t-il de mots de passe différents ?

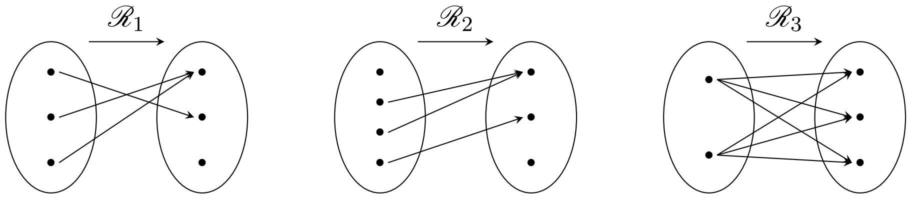
Exercice 03 ***Relations binaires***

Dans cet exercice, on considère l'ensemble $E = \{1; 2; 3; 4\}$.
Représenter à l'aide d'un diagramme les différentes relations suivantes :

1. $x \mathscr{R} y \iff x = y$
2. $x \mathscr{R} y \iff x \leqslant y$
3. $x \mathscr{R} y \iff x + y = 4$

Exercice 04 ***Relation, application, fonction***

Pour chacun des diagrammes ci-dessous, dire s'il correspond à une relation, une application ou une fonction.



Exercice 05 ***Inception***

Soit $\mathrm{E} = \{\text{Relation}, \text{Fonction}, \text{Application}\}$.

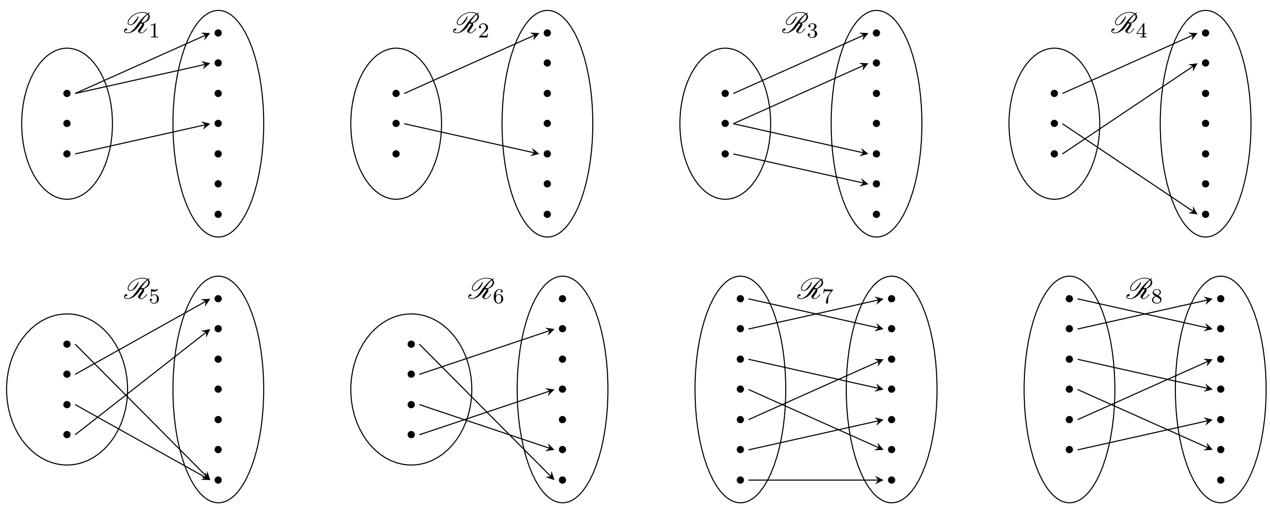
On définit la relation $\mathscr{R}$ de E par : $x\mathscr{R}y \iff$ « x est y »

Par exemple, une fonction est une relation, donc (Fonction $\mathscr{R}$ Relation).

1. Donner le diagramme associé à $\mathscr{R}$.
2. $\mathscr{R}$ est-elle une fonction ? une application ? une relation ?

Exercice 06 ***Injection, surjection, bijection***

Pour chacune des relations ci-dessous, dire si c'est une application, et si elle est injective, surjective, bijective ou rien du tout.



Exercice 07 ***Abstraction***

Même exercice :

$$\begin{array}{rccc} f_1 : & \mathbb{N} & \longrightarrow & \mathbb{N} \\ & x & \longmapsto & x+1 \end{array} \qquad \begin{array}{rccc} f_2 : & \mathbb{Z} & \longrightarrow & \mathbb{Z} \\ & x & \longmapsto & x+1 \end{array}$$

$$\begin{array}{rccc} f_3 : & \mathbb{N} & \longrightarrow & \mathbb{N} \\ & x & \longmapsto & x^2 \end{array} \qquad \begin{array}{rccc} f_4 : & \mathbb{Z} & \longrightarrow & \mathbb{N} \\ & x & \longmapsto & x^2 \end{array}$$

$$\begin{array}{rccc} f_5 : & \mathbb{N} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & \frac{1}{x} \end{array}$$

Exercice 08 ***Image directe, image réciproque***

Soit $E = \{0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7\}$ et $F = \{0; 1; 2; 3\}$. f est l'application de E dans F qui à tout élément de E associe son reste dans la division euclidienne par 3.

1. f est-elle injective ? surjective ?
2. On pose $A = \{1; 3; 4\}$. Déterminer $f(A)$.
3. On pose $C = \{2; 3\}$. Déterminer $f^{-1}(C)$.

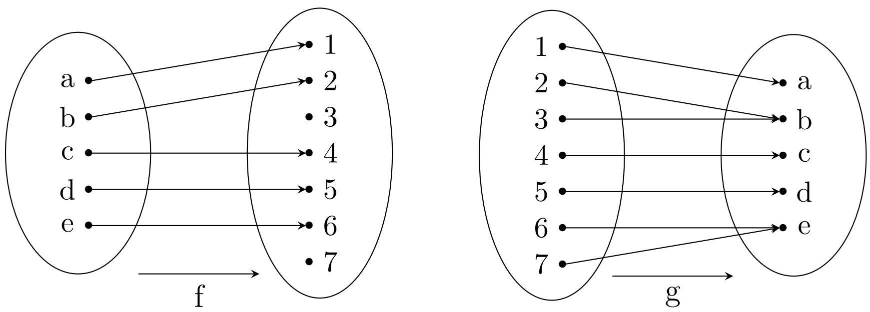
Exercice 09 ***Avec une expression***

Soit f l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par $f(x) = 4x + 10$.

1. f est-elle injective ?
2. f est-elle surjective ?
3. f est-elle bijective ?
4. Déterminer l'image directe par f de $[2\,;3]$ et $[0\,;+\infty]$.

Exercice 10 ***Composition***

Soit f l'application de E dans F et g l'application de F dans E définies par les diagrammes ci-dessous :



Pour chacune des applications suivantes, dire si elle est injective et/ou surjective :

1. f
2. g
3. $g \circ f$
4. $f \circ g$

Exercice 11 ***Composition et Réciproque***

Soit E $= \{a; b; c; d\}$, F $= \{1; 2; 3\}$ et G $= \{\alpha; \beta; \gamma\}$.
On définit les applications f de E dans F et g de F vers G de la façon suivante :

$$f(a) = 2 \qquad f(b) = 1 \qquad f(c) = 3 \qquad f(d) = 2 \qquad g(1) = \gamma \qquad g(2) = \alpha \qquad g(3) = \beta$$

1. Les applications f et g sont-elles injectives ? surjectives ? bijectives ?
2. Définir l'application $g \circ f$. Est-elle injective ? surjective ? bijective ?
3. Peut-on définir l'application $f \circ g$?
4. Peut-on définir l'application réciproque de f ? de g ? de $g \circ f$?

Exercice 12 ***Relation entre chaînes de caractères***

On note E l'ensemble des chaînes de caractères non vides.

Dans l'ensemble E, on considère la relation binaire $\mathscr{R}$ définie par x $\mathscr{R}$ y $\iff$ $x[0] == y[0]$.

Par exemple `"az"` $\mathscr{R}$ `"abc"` mais on n'a pas `"zz"` $\mathbb{R}$ `"az"`.

1. Donner un élément x de E tel que x $\mathscr{R}$ `"sio"`.
2. Soit f l'application de E dans E définie par f(x) = x[0].
   (a) Déterminer $f($ `"sio"` $)$.
   (b) Donner un antécédent de `"a"` par f.
   (c) f est-elle injective ?
   (d) f est-elle surjective ?
3. Soit g l'application de E dans $\mathbb{N}$ définie par g(x) = |x| (où |x| est la longueur de x).
   (a) g est-elle injective ?
   (b) g est-elle surjective ?
4. Peut-on définir l'applcation $g \circ f$? Quelle est sa particularité ?

Exercice 13 Soit E l'ensemble $\{a; b; c; d\}$.

On définit les applications :

- f de $\mathscr{P}(E)$ dans $\mathscr{P}(E)$ par $f(A) = A \cap \{a; b; c\}$
- g de $\mathscr{P}(E)$ dans $\{0; 1; 2; 3; 4\}$ par $g(A) = card(A)$

Les propositions suivantes sont-elles vraies ?

1. f est injective
2. g est injective ou surjective
3. $\exists A \in \mathscr{P}(E)\ /\ f(A) = \{a; b\}$
4. $\exists A \in \mathscr{P}(E)\ /\ g \circ f(A) = 2$