Exercices : Calcul matriciel

Exercice 01 *Taille et coefficients d'une matrice*

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 1 & -4 & 3 \end{pmatrix}$

1. Quelle est la taille de la matrice A ?
2. Donner, s'ils existent, la valeur des coefficients suivants : a_{11} a_{13} a_{32} a_{23}

Exercice 02 *Matrice définie par ses coefficients*

La matrice $A = (a_{ij})$ est la matrice carrée d'ordre 3 dont les coefficients vérifient $a_{ij} = 2i - j$.
Écrire la matrice A avec tous ses coefficients.

Exercice 03 *Additions de matrices*

Calculer $A + B$, $A - B$, $2A$ et $2A - 3B$ avec : $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$

Exercice 04 *Produit matriciel 1*

Effectuer les multiplications suivantes :

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} -2 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 2 & 3 & -3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Exercice 05 *Produit matriciel 2*

Même exercice :

$$\begin{pmatrix} 1 & 5 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} -4 & 1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 3 \\ -5 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & -2 & 24 \\ 2 & 4 & -5 \\ 3 & 1 & -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Exercice 06 *Produit matriciel 3*

Même exercice :

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 4 & -1 & 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 4 & 2 & -2 \\ -3 & 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 2 & -5 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Exercice 07 *Produit matriciel 4*

Même exercice :

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -10 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 3 & 7 & 1 \\ 2 & 5 & 2 \\ 4 & 1 & -2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & -4 \end{pmatrix}$$

Exercice 08 ***Taille correcte exigée !***

Parmi les matrices suivantes, donner tous les produits possibles, ainsi que la taille de la matrice obtenue (sans donner ses coefficients).

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 6 \\ 8 & 9 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 7 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \qquad D = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 6 & 7 & 1 \\ 0 & 3 & 6 & 8 & -3 \end{pmatrix}$$

Exercice 09 ***Commutativité ?***

Calculer les produits AB et BA dans chacun des cas suivants :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Quelle remarque peut-on faire ?

Exercice 10 ***Puissances d'une matrice***

On considère la matrice A suivante :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

1. Calculer A^2, A^3 et A^4.
2. Émettre une conjecture sur A^n pour $n \in \mathbb{N}^*$.

Exercice 11 ***Déterminant et inversibilité***

Calculer le déterminant des matrices 2×2 suivantes, dire si elles sont inversibles, et donner (si possible) leur inverse.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & -1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} -5 & 3 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}$$

Exercice 12 ***Calculatrice, au secours !***

Même exercice.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 4 & 0 & 5 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 4 & 2 \\ 3 & 1 & 5 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Exercice 13 ***Résolution de systèmes***

On considère le système d'équations suivant :

$$\begin{cases} x+y &= 3 \\ 2x+3y &= 2 \end{cases}$$

1. Déterminer 4 réels a, b, c et d tels que le système précédent s'écrive sous la forme :

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

   On note A la matrice $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$.

2. Justifier que A est inversible.
3. *Dans cette question, la calculatrice est autorisée (mais non indispensable).*
   (a) Calculer A^{-1} puis $A^{-1} \times \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$.
   (b) Quelles sont les solutions du système précédent ?
4. *Dans cette question, la calculatrice est interdite !*

   Les solutions du système sont données par les formules suivantes (dites formules de *Cramer*) :

$$x = \frac{\begin{vmatrix} \mathbf{3} & b \\ \mathbf{2} & d \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}} \qquad y = \frac{\begin{vmatrix} a & \mathbf{3} \\ c & \mathbf{2} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}}$$

   (on a remplacé la première et la deuxième colonne de A par les coefficients du terme de droite du système)

   Déterminer les solutions du système avec cette méthode.

5. Résoudre les systèmes suivants avec la méthode de votre choix :

$$(S_1) : \begin{cases} 2x-y &= 1 \\ 3x+y &= -1 \end{cases} \qquad (S_2) : \begin{cases} x-2y &= 12 \\ x+y &= 8 \end{cases}$$