

## Exercices : Graphes

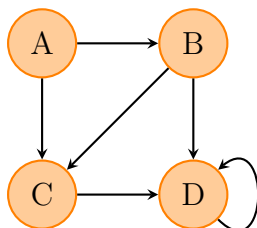
**Exercice 01** *Graphe et relation binaire*

Donner le graphe orienté correspondant à la relation suivante :

$$E = \{0; 1; 2; 3\} \quad x\mathcal{R}y \iff x + y \leq x \times y$$

**Exercice 02** *Graphe simple*

On considère le graphe orienté  $\mathcal{G}$  ci-dessous :



1. Déterminer l'ordre de ce graphe.
2. Écrire le tableau des successeurs et des prédécesseurs.
3. Déterminer la matrice d'adjacence de ce graphe.

Sommet	Prédécesseurs
A	A
B	A,C,D
C	E
D	B,E
E	$\emptyset$

**Exercice 03** *Depuis un tableau*

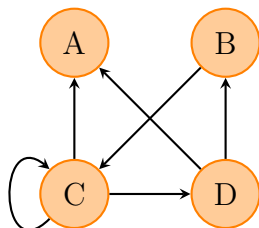
À partir du tableau ci-contre, représenter le graphe orienté associé et déterminer sa matrice d'adjacence.

**Exercice 04** *Depuis une matrice*

Pour chacune des matrices ci-dessous, dessiner un graphe correspondant :

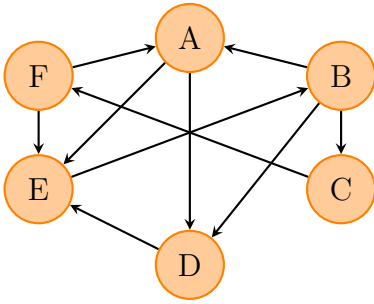
$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

**Exercice 05** *Matrices et Chemins*



1. Donner la matrice d'adjacence  $M$  du graphe ci-contre.
2. Calculer les matrices  $M^4$ ,  $M^5$  et  $M^6$ .
3. Combien y a-t-il de chemins de longueur 5 reliant C à A ? Les donner tous.
4. Entre quels sommets n'existe-t-il pas de chemins de longueur 6 ?
5. Existe-t-il un chemin hamiltonien dans ce graphe ? Si oui, le donner.

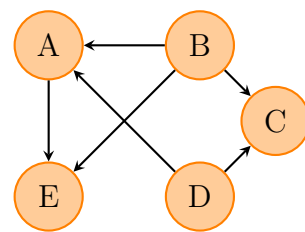
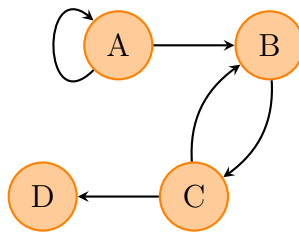
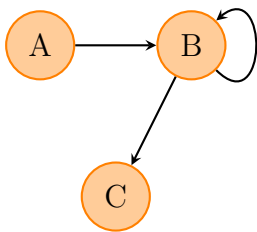
**Exercice 06** *Matrices et Chemins 2*



1. Donner la matrice d'adjacence  $M$  du graphe ci-contre.
2. Combien y a-t-il de chemins de longueur 5 partant de B dans le graphe ?
3. Combien y a-t-il de chemins de longueur 5 dans le graphe ?
4. Déterminer un chemin de longueur minimale allant de A à F.
5. Existe-t-il un chemin hamiltonien dans ce graphe ? Si oui, le donner.

**Exercice 07** *Fermeture transitive*

Déterminer la fermeture transitive des graphes suivants, directement ou à l'aide de calculs matriciels.



**Exercice 08** *Jeu en ligne*

Cinq joueurs, notés A, B, C, D et E, jouent régulièrement à un jeu en ligne. Chaque partie de ce jeu oppose deux adversaires. Le tableau suivant donne, pour chacun des cinq joueurs, la liste des adversaires qu'il a déjà battus.

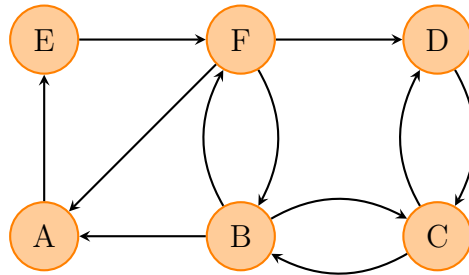
Le joueur	a déjà battu
A	B,D
B	C
C	B,D
D	E
E	D

Ainsi, par exemple, le joueur C a déjà battu les joueurs B et D.

1. En considérant le tableau précédent comme un tableau de successeurs, représenter la situation par un graphe orienté  $\mathcal{G}$ , dans lequel un arc relie un sommet  $x$  à un sommet  $y$  si le joueur  $x$  a déjà battu le joueur  $y$ .
2. Donner la matrice d'adjacence  $M$  du graphe  $\mathcal{G}$ .
3. Le graphe  $\mathcal{G}$  contient-il un circuit ? Contient-il un chemin hamiltonien ? Justifier les réponses.

**Exercice 09** *Réseau de distribution*

Un fournisseur doit livrer 5 entreprises. Le réseau de transport est représenté par le graphe orienté donné ci-dessous où l'entrepôt du fournisseur est noté F, et les entreprises sont notées A, B, C, D, E.



1. Donner la matrice d'adjacence  $M$  de ce graphe. On rangera les sommets dans l'ordre alphabétique.
2. Le fournisseur souhaite livrer chacune des entreprises. Il part de son entrepôt.
  - (a) Existe-t-il un chemin hamiltonien d'origine F dans ce graphe ? Si oui, citer un tel chemin.
  - (b) Interpréter le résultat relativement aux possibilités de livraison.
3. (a) Calculer la matrice  $M^3$ .
  - (b) Dans le contexte de l'exercice, interpréter le coefficient situé sur la quatrième ligne et la troisième colonne de la matrice  $M^3$ .
  - (c) Combien existe-t-il de chemins de longueur 3 issus du sommet D dans ce graphe ? Justifier puis citer ces chemins.
  - (d) Le fournisseur doit maintenant effectuer une livraison, depuis l'entrepôt, dans quatre entreprises en commençant par l'entreprise D.  
 Montrer que, pour effectuer cette livraison sans repasser par une entreprise déjà livrée, le fournisseur n'a qu'un seul chemin possible.  
 Expliquer la démarche et préciser ce chemin.

**Exercice 10** *Liens hypertextes*

Un site Web se compose de quatre pages notées A, B, C et D.

Des liens hypertextes permettent de naviguer entre les pages, de la façon suivante :

- A reçoit un unique lien de B et un unique lien de C ;
- B reçoit un unique lien de D ;
- C reçoit un unique lien de B, un unique lien de D et un unique lien de A ;
- D reçoit un unique lien de A.

1. Représenter l'ensemble de ces liens par un graphe orienté  $\mathcal{G}$  de sommets A, B, C, D, dans lequel, si une page Y reçoit un lien d'une page X, on représente un arc du sommet X vers le sommet Y.
2. (a) Donner la matrice d'adjacence  $M$  de ce graphe.  
 (b) Interpréter les valeurs des termes situés sur la diagonale de la matrice  $M$ .  
 (c) Calculer  $M^4$ .  
 (d) Le graphe contient-il des circuits? Justifier la réponse.  
 (e) Interpréter le terme de la 1re et 3e colonne de la matrice  $M^4$  en termes de chemins, puis donner la liste de ces chemins.
3. Calculer  $\widehat{M}$ , la matrice de la fermeture transitive du graphe  $\mathcal{G}$ .

Interpréter le résultat obtenu dans le contexte de l'exercice.

**Exercice 11** *Maintenance réseau*

Un administrateur réseau et en place une stratégie logique de maintenance en cinq étapes : A, B, C, D et E. Il a noté dans un tableau la dépendance immédiate des étapes les unes par rapport aux autres, en fonction de la logique d'enchaînement des étapes.

Par exemple, selon lui, il est logique d'enchaîner immédiatement l'étape B après l'étape A, ou de répéter l'étape A si nécessaire, mais il n'est pas logique d'effectuer immédiatement les étapes C, D et E après l'étape A.

Étape	A	B	C	D	E
Étapes suivantes	A,B	B,C	D	C	A,D,E

1. Dessiner le graphe orienté  $\mathcal{G}$  correspondant au tableau ci-dessus.
2. Donner la matrice d'adjacence  $M$  associée à ce graphe.
3. Combien y a-t-il de chemins de longueur 2 d'origine E dans le graphe orienté  $\mathcal{G}$ ?
4. Combien y a-t-il de chemins de longueur 2 d'extrémité C dans le graphe orienté  $\mathcal{G}$ ?
5. Combien y a-t-il de circuits de longueur 4 dans le graphe?
6. On appelle  $\widehat{M}$  la matrice de la fermeture transitive de  $\mathcal{G}$ .
  - (a) Déterminer  $\widehat{M}$ .
  - (b) Interpréter la valeurs des coefficients (1,4) et (1,5).
  - (c) Représenter la fermeture transitive de  $\mathcal{G}$ .