Graphes

Cours BTS SIO 2ème année

Année 2025/2026

Plan du cours

Définitions

- Un **graphe orienté** est la donnée d'un ensemble E (ensemble des **noeuds**) et d'un ensemble $A \subset E \times E$ (ensemble des **arcs**).

Définitions

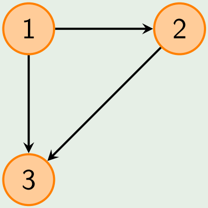
- Un **graphe orienté** est la donnée d'un ensemble E (ensemble des **noeuds**) et d'un ensemble $A \subset E \times E$ (ensemble des **arcs**).
- Étant donnés un ensemble E et une relation binaire $\mathcal{R}$ sur E, on peut représenter cette relation sous la forme d'un graphe orienté.

Définitions

- Un **graphe orienté** est la donnée d'un ensemble E (ensemble des **noeuds**) et d'un ensemble $A \subset E \times E$ (ensemble des **arcs**).
- Étant donnés un ensemble E et une relation binaire $\mathcal{R}$ sur E, on peut représenter cette relation sous la forme d'un graphe orienté.

Exemple

Si $E = \{1, 2, 3\}$ et $\mathcal{R}$ est la relation définie par $x\mathcal{R}y \Leftrightarrow x < y$, alors $\mathcal{R}$ peut se représenter sous la forme suivante (dite **représentation sagittale**) :



$1 \mathcal{R} 2$: il existe un arc qui relie le sommet 1 au sommet 2

$2 \not\mathcal{R} 1$: pas d'arc entre 2 et 1

Définitions

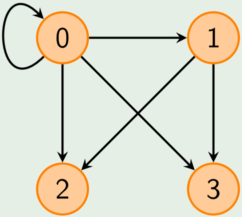
- L'**ordre** d'un graphe est le **nombre de sommets** de ce graphe.
  Il est égal à $Card(E)$, où E est l'ensemble associé à la relation $\mathcal{R}$.
- Un élément peut être en relation avec lui-même : le graphe présente alors un sommet relié à lui-même par un arc appelé **boucle**.

Définitions

- L'**ordre** d'un graphe est le **nombre de sommets** de ce graphe. Il est égal à $Card(E)$, où E est l'ensemble associé à la relation $\mathcal{R}$.
- Un élément peut être en relation avec lui-même : le graphe présente alors un sommet relié à lui-même par un arc appelé **boucle**.

Exemple

Si $E = \{0, 1, 2, 3\}$ et $\mathcal{R}$ est la relation définie par $x\mathcal{R}y \Leftrightarrow 2x \leq y$, alors :



L'ordre du graphe est égal à 4

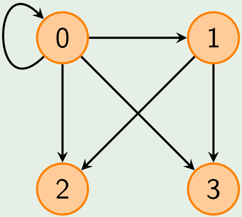
$0 \ \mathcal{R} \ 0$ car $2 \times 0 \leq 0$: on a une boucle sur 0

Définitions

- L'**ordre** d'un graphe est le **nombre de sommets** de ce graphe.
  Il est égal à $Card(E)$, où E est l'ensemble associé à la relation $\mathcal{R}$.
- Un élément peut être en relation avec lui-même : le graphe présente alors un sommet relié à lui-même par un arc appelé **boucle**.

Exemple

Si $E = \{0, 1, 2, 3\}$ et $\mathcal{R}$ est la relation définie par $x\mathcal{R}y \Leftrightarrow 2x \leq y$, alors :



L'ordre du graphe est égal à 4

$0 \; \mathcal{R} \; 0$ car $2 \times 0 \leq 0$: on a une boucle sur 0

☞ *Exercice 1*

Successeurs et Prédécesseurs

Lorsque $x\mathcal{R}y$ (lorsque un arc relie le sommet x au sommet y), on dit que y est un **successeur** de x dans le graphe associé.

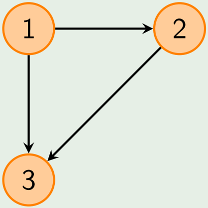
Tout graphe orienté est caractérisé par une **liste de successeurs**, généralement représentée sous forme d'un tableau.

Successeurs et Prédécesseurs

Lorsque $x\mathcal{R}y$ (lorsque un arc relie le sommet x au sommet y), on dit que y est un **successeur** de x dans le graphe associé.

Tout graphe orienté est caractérisé par une **liste de successeurs**, généralement représentée sous forme d'un tableau.

Exemple : graphe et tableau de successeurs



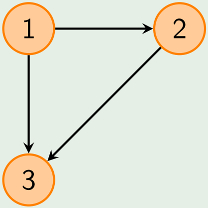
Sommet	Successeurs
1	2,3
2	3
3	$\emptyset$

Successeurs et Prédécesseurs

Lorsque $x\mathcal{R}y$ (lorsque un arc relie le sommet x au sommet y), on dit que y est un **successeur** de x dans le graphe associé.

Tout graphe orienté est caractérisé par une **liste de successeurs**, généralement représentée sous forme d'un tableau.

Exemple : graphe et tableau de successeurs



Sommet	Successeurs
1	2,3
2	3
3	$\emptyset$

☞ *Il est également possible de définir la liste des* ***prédécesseurs****.*

Matrice d'adjacence

On considère un graphe d'ordre n dont on numérote les sommets de 1 à n.

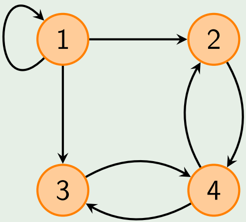
La **matrice d'adjacence** de ce graphe est la matrice carrée d'ordre n dont l'élément d'indice (i, j) est égal au nombre d'arcs reliant le sommet numéro i au sommet numéro j.

Matrice d'adjacence

On considère un graphe d'ordre n dont on numérote les sommets de 1 à n.

La **matrice d'adjacence** de ce graphe est la matrice carrée d'ordre n dont l'élément d'indice (i, j) est égal au nombre d'arcs reliant le sommet numéro i au sommet numéro j.

Exemple : graphe et matrice d'adjacence



La matrice d'adjacence est :

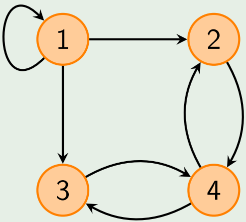
$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Matrice d'adjacence

On considère un graphe d'ordre n dont on numérote les sommets de 1 à n.

La **matrice d'adjacence** de ce graphe est la matrice carrée d'ordre n dont l'élément d'indice (i, j) est égal au nombre d'arcs reliant le sommet numéro i au sommet numéro j.

Exemple : graphe et matrice d'adjacence



La matrice d'adjacence est :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

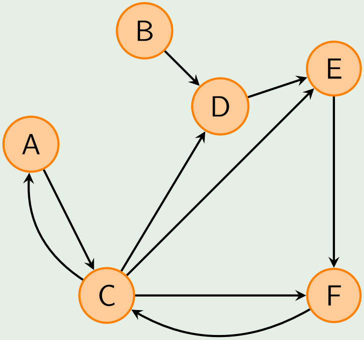
☞ *Exercices 2,3,4*

Chemins et circuits

On considère un graphe orienté.

- Un **chemin** est une succession de sommets dans un ordre donné, chacun étant relié au suivant par un arc.
- La **longueur d'un chemin** est le nombre d'arcs qui le composent.
- Un **chemin hamiltonien** est un chemin qui passe une et une seule fois par chaque sommet.
- Un **circuit** est un chemin dont le premier et le dernier sommet sont identiques.

Exemples de chemins



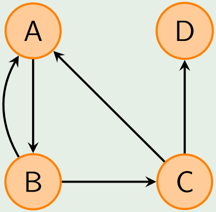
- (B,D,E,F) est un **chemin** de longueur 3
- (E,F,C,D,E) est un **circuit** de longueur 4
- (B,D,E,F,C,A) est un **chemin hamiltonien**

Chemins et circuits

Propriété

On considère un graphe de matrice d'adjacence M.
Pour tout entier naturel p non nul, le coefficient d'indice (i, j) de M^p est le **nombre de chemins de longueur p** reliant le sommet i au sommet j.

Exemple



$$M = \left(\qquad \qquad \right) \qquad M^4 = \left(\qquad \qquad \right)$$

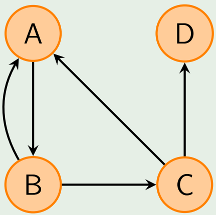
Il existe   chemins de longueur 4 allant de B à A.

Chemins et circuits

Propriété

On considère un graphe de matrice d'adjacence M.
Pour tout entier naturel p non nul, le coefficient d'indice (i, j) de M^p est le **nombre de chemins de longueur p** reliant le sommet i au sommet j.

Exemple



$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad M^4 = \begin{pmatrix} \quad \end{pmatrix}$$

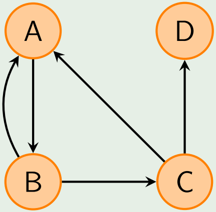
Il existe   chemins de longueur 4 allant de B à A.

Chemins et circuits

Propriété

On considère un graphe de matrice d'adjacence M.
Pour tout entier naturel p non nul, le coefficient d'indice (i, j) de M^p est le **nombre de chemins de longueur p** reliant le sommet i au sommet j.

Exemple



$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad M^4 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

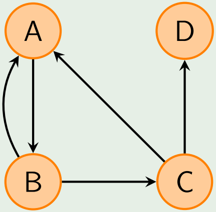
Il existe   chemins de longueur 4 allant de B à A.

Chemins et circuits

Propriété

On considère un graphe de matrice d'adjacence M.
Pour tout entier naturel p non nul, le coefficient d'indice (i, j) de M^p est le **nombre de chemins de longueur p** reliant le sommet i au sommet j.

Exemple



$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad M^4 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

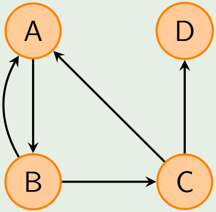
Il existe 2 chemins de longueur 4 allant de B à A.

Chemins et circuits

Propriété

On considère un graphe de matrice d'adjacence M.
Pour tout entier naturel p non nul, le coefficient d'indice (i, j) de M^p est le **nombre de chemins de longueur p** reliant le sommet i au sommet j.

Exemple



$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad M^4 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Il existe 2 chemins de longueur 4 allant de B à A.

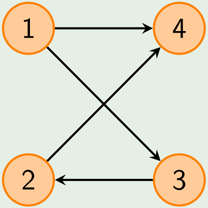
☞ *Exercices 5,6*

Accessibilité

On considère un graphe orienté d'ordre n dont les sommets sont numérotés de 1 à n. On note M sa matrice d'adjacence.

- Un sommet j est dit **accessible** depuis un sommet i s'il existe un chemin reliant i à j.
- On appelle **matrice d'accessibilité** du graphe la matrice carrée d'ordre n, notée $\widehat{M}$, dont le coefficient m_{ij} vaut 1 si j est accessible depuis i, et 0 sinon.

Exemple



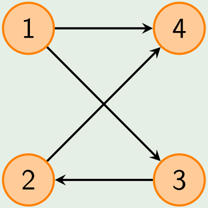
$$\widehat{M} = \begin{pmatrix} & & & \\ & & & \\ & & & \\ & & & \end{pmatrix}$$

Accessibilité

On considère un graphe orienté d'ordre n dont les sommets sont numérotés de 1 à n. On note M sa matrice d'adjacence.

- Un sommet j est dit **accessible** depuis un sommet i s'il existe un chemin reliant i à j.
- On appelle **matrice d'accessibilité** du graphe la matrice carrée d'ordre n, notée $\widehat{M}$, dont le coefficient m_{ij} vaut 1 si j est accessible depuis i, et 0 sinon.

Exemple

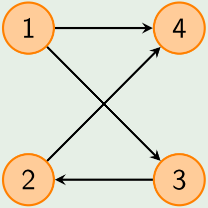


$$\widehat{M} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Soit $\mathcal{G}$ un graphe orienté de matrice d'adjacence M.

La matrice $\widehat{M}$ est la matrice d'adjacence du graphe $\widehat{\mathcal{G}}$, appelé **fermeture transitive** de $\mathcal{G}$, composé des mêmes sommets et arcs que ceux de $\mathcal{G}$, auxquels on ajoute tous les arcs des « raccourcis ».

Exemple



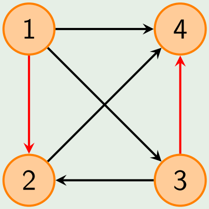
$$M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Fermeture transitive

Soit $\mathcal{G}$ un graphe orienté de matrice d'adjacence M.

La matrice $\widehat{M}$ est la matrice d'adjacence du graphe $\widehat{\mathcal{G}}$, appelé **fermeture transitive** de $\mathcal{G}$, composé des mêmes sommets et arcs que ceux de $\mathcal{G}$, auxquels on ajoute tous les arcs des « raccourcis ».

Exemple

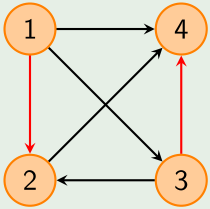


$$M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \widehat{M} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Soit $\mathcal{G}$ un graphe orienté de matrice d'adjacence M.

La matrice $\widehat{M}$ est la matrice d'adjacence du graphe $\widehat{\mathcal{G}}$, appelé **fermeture transitive** de $\mathcal{G}$, composé des mêmes sommets et arcs que ceux de $\mathcal{G}$, auxquels on ajoute tous les arcs des « raccourcis ».

Exemple



$$M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \widehat{M} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

☞ *Utilité ? Savoir directement si deux sommets sont reliés par un chemin.*

Matrices booléennes et fermeture transitive

On considère deux matrices A et B composées uniquement de 0 et de 1 (matrices booléennes).

- La matrice $A \oplus B$ est égale à la matrice $A + B$ dont tous les coefficients strictement positifs sont remplacés par des 1.
- La matrice $A \otimes B$ est égale à la matrice $A \times B$ dont tous les coefficients strictement positifs sont remplacés par des 1.
- La matrice $A^{[p]}$ est égale à la matrice A^p dont tous les coefficients strictement positifs sont remplacés par des 1.

Matrices booléennes et fermeture transitive

Exemple

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A + B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \Longrightarrow \quad A \oplus B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \color{red}{1} \\ 0 & \color{red}{1} & 1 \\ 1 & 0 & \color{red}{1} \end{pmatrix}$$

$$A \times B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \Longrightarrow \quad A \otimes B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \color{red}{1} \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$B^4 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 5 \end{pmatrix} \quad \Longrightarrow \quad B^{[4]} = \begin{pmatrix} \color{red}{1} & 0 & \color{red}{1} \\ 0 & 1 & 0 \\ \color{red}{1} & 0 & \color{red}{1} \end{pmatrix}$$

Matrices booléennes et fermeture transitive

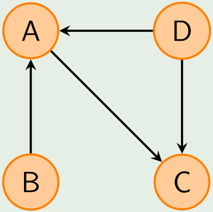
Propriété

Soit $\mathcal{G}$ un graphe orienté d'ordre n, de matrice d'adjacence M.

La matrice d'accessibilité $\widehat{M}$ du graphe $\mathcal{G}$ est donnée par :

$$\widehat{M} = M \oplus M^{[2]} \oplus M^{[3]} \oplus \ldots \oplus M^{[n]}$$

Exemple



Ordre du graphe : $n = 4$

Matrice d'adjacence : $M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

Exemple

On calcule :

$$M + M^2 + M^3 + M^4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

On en déduit :

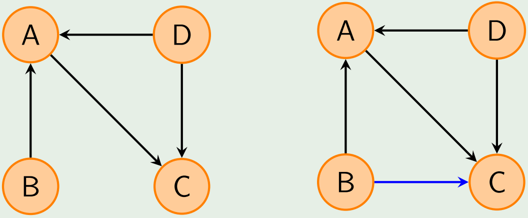
$$\widehat{M} = M \oplus M^{[2]} \oplus M^{[3]} \oplus M^{[4]} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \color{red}{1} & 0 \end{pmatrix}$$

Matrices booléennes et fermeture transitive

Exemple

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \widehat{M} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & \color{blue}{1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Un seul coefficient est modifié ; il suffit de rajouter l'arc correspondant pour obtenir $\widehat{\mathcal{G}}$:



$\mathcal{G}$ $\qquad$ $\widehat{\mathcal{G}}$