Graphes et Algorithmes

Cours BTS SIO 2ème année

Année 2025/2026

Plan du cours

1. Niveaux dans un graphe orienté sans circuit
   - Définitions
   - Algorithme
   - Arborescence

Définitions

Dans un **graphe orienté sans circuit**, il n'existe (par définition) aucun chemin partant d'un sommet et y revenant.

Définitions

Dans un **graphe orienté sans circuit**, il n'existe (par définition) aucun chemin partant d'un sommet et y revenant.

Propriété

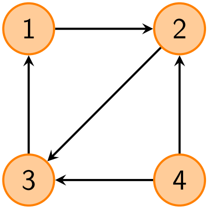
Dans un graphe orienté sans circuit, il existe un sommet n'ayant aucun prédécesseur.

Définitions

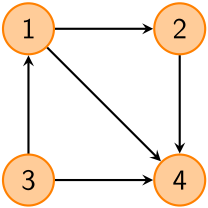
Dans un **graphe orienté sans circuit**, il n'existe (par définition) aucun chemin partant d'un sommet et y revenant.

Propriété

Dans un graphe orienté sans circuit, il existe un sommet n'ayant aucun prédécesseur.



Un graphe avec circuit



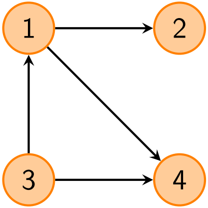
Un graphe sans circuit

Définitions

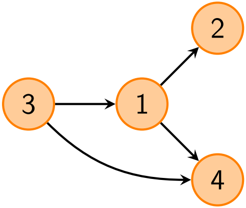
Lorsqu'un graphe orienté est sans circuit, il est possible de l'organiser de manière hiérarchisée de sorte à ce qu'il soit plus lisible.

Définitions

Lorsqu'un graphe orienté est sans circuit, il est possible de l'organiser de manière hiérarchisée de sorte à ce qu'il soit plus lisible.



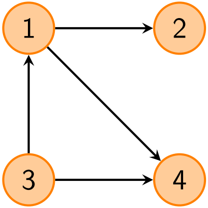
Un graphe sans circuit « brut »



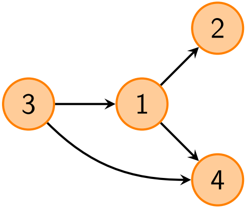
Le même graphe hiérarchisé

Définitions

Lorsqu'un graphe orienté est sans circuit, il est possible de l'organiser de manière hiérarchisée de sorte à ce qu'il soit plus lisible.



Un graphe sans circuit « brut »



Le même graphe hiérarchisé

Comment faire ? : en calculant pour chaque sommet son **niveau**.

Algorithme

Algorithme de calcul des niveaux

Soit $\mathcal{G}$ un graphe sans circuit.

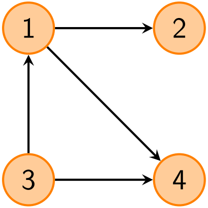
- $\mathcal{S}$ est l'ensemble des sommets, n est un entier égal à 0.
- Tant que $\mathcal{S}$ est non vide :
  - Affecter le niveau n aux éléments de $\mathcal{S}$ sans prédécesseur, et retirer ces éléments de $\mathcal{S}$.
  - Incrémenter n de 1.

Algorithme de calcul des niveaux

Soit $\mathcal{G}$ un graphe sans circuit.

- $\mathcal{S}$ est l'ensemble des sommets, n est un entier égal à 0.
- Tant que $\mathcal{S}$ est non vide :
  - Affecter le niveau n aux éléments de $\mathcal{S}$ sans prédécesseur, et retirer ces éléments de $\mathcal{S}$.
  - Incrémenter n de 1.

Avec le graphe précédent :



Sommet	Préd.	Niveau
1	3	-
2	1	-
3	-	-
4	1,3	-

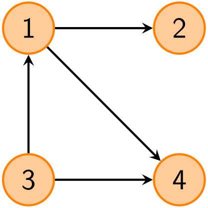
Algorithme

Algorithme de calcul des niveaux

Soit $\mathcal{G}$ un graphe sans circuit.

- $\mathcal{S}$ est l'ensemble des sommets, n est un entier égal à 0.
- Tant que $\mathcal{S}$ est non vide :
  - Affecter le niveau n aux éléments de $\mathcal{S}$ sans prédécesseur, et retirer ces éléments de $\mathcal{S}$.
  - Incrémenter n de 1.

Avec le graphe précédent :



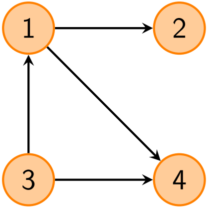
Sommet	Préd.	Niveau
1	$\cancel{3}$	-
2	1	-
3	-	**0**
4	1,$\cancel{3}$	-

Algorithme de calcul des niveaux

Soit $\mathcal{G}$ un graphe sans circuit.

- $\mathcal{S}$ est l'ensemble des sommets, n est un entier égal à 0.
- Tant que $\mathcal{S}$ est non vide :
  - Affecter le niveau n aux éléments de $\mathcal{S}$ sans prédécesseur, et retirer ces éléments de $\mathcal{S}$.
  - Incrémenter n de 1.

Avec le graphe précédent :



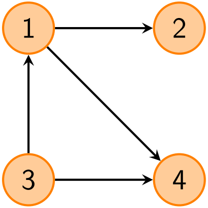
Sommet	Préd.	Niveau
1	$\cancel{3}$	**1**
2	$\cancel{1}$	-
3	-	**0**
4	$\cancel{1}$,$\cancel{3}$	-

Algorithme de calcul des niveaux

Soit $\mathcal{G}$ un graphe sans circuit.

- $\mathcal{S}$ est l'ensemble des sommets, n est un entier égal à 0.
- Tant que $\mathcal{S}$ est non vide :
  - Affecter le niveau n aux éléments de $\mathcal{S}$ sans prédécesseur, et retirer ces éléments de $\mathcal{S}$.
  - Incrémenter n de 1.

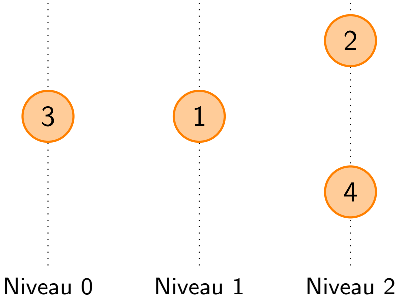
Avec le graphe précédent :



Sommet	Préd.	Niveau
1	$\cancel{3}$	**1**
2	$\cancel{1}$	**2**
3	-	**0**
4	$\cancel{1}$,$\cancel{3}$	**2**

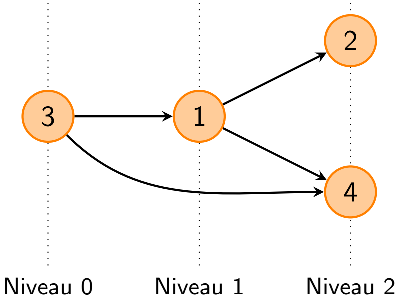
Algorithme

- On organise ensuite les sommets par niveau, en préférant une lecture de gauche à droite ou de haut en bas :



Algorithme

- On organise ensuite les sommets par niveau, en préférant une lecture de gauche à droite ou de haut en bas :



- On relie ensuite les sommets comme dans le graphe d'origine.

Arborescence

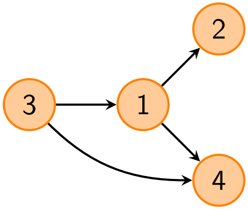
Définition

Une **arborescence** est un graphe orienté qui possède un **unique sommet de niveau 0**, qu'on appelle la **racine** et à partir de laquelle on peut atteindre **tout autre sommet par un unique chemin**.

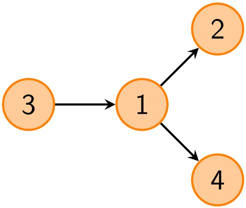
Arborescence

Définition

Une **arborescence** est un graphe orienté qui possède un **unique sommet de niveau 0**, qu'on appelle la **racine** et à partir de laquelle on peut atteindre **tout autre sommet par un unique chemin**.



Ceci n'est pas une arborescence



Ceci est une arborescence