

DS n°2 : Logique et Ensembles

Exercice 01 *Logique propositionnelle*

(6 points)

1. Dans chaque cas, donner un exemple :

(a) une proposition dont la valeur de vérité est vraie

.....

(b) deux propositions A et B telles que la proposition « A et B » est fausse

.....

(c) un énoncé qui n'est pas une proposition

.....

2. On considère les propositions suivantes :

A : « Alice est inquiète » B : « Bob a déchiffré le message d'Alice »

Formuler les énoncés suivants en logique propositionnelle :

(a) Bob a déchiffré le message d'Alice et Alice est inquiète.

(b) Bob n'a pas déchiffré le message d'Alice ou Alice n'est pas inquiète.

(c) Si Bob a déchiffré le message d'Alice alors Alice n'est pas inquiète.

3. Donner les valeurs de vérité des propositions suivantes :

(a) $(11 > 0) \wedge (3 < 2)$: (c) $((4 = 1) \vee (\pi < 4)) \wedge (3^4 < 4^3)$:

(b) $(3 > 6) \vee (6 > 20)$: (d) $(4 \neq 1) \implies (4 = 1)$:

4. Soient P et Q deux propositions.

(a) Compléter la table de vérité de $\overline{P \wedge Q}$.

| P | Q | \overline{Q} | $P \wedge \overline{Q}$ | $\overline{P \wedge \overline{Q}}$ |
|---|---|----------------|-------------------------|------------------------------------|
| F | F | | | |
| F | V | | | |
| V | F | | | |
| V | V | | | |

(b) Donner une proposition équivalente à $\overline{P \wedge Q}$.

.....

Exercice 02 *Calcul ensembliste*

(4 points)

On considère les ensembles $E = \{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7\}$, $A = \{1; 3; 5; 7\}$, $B = \{2; 4; 6\}$ et $C = \{1; 3; 6\}$.

1. Déterminer les ensembles suivants :

(a) $A \cap B \cap C$:

(b) $A \cap (B \cup C)$:

(c) $(A \cup B) \cap C$:

2. On note $A \setminus B = \{x \in E, x \in A \wedge x \notin B\}$. Déterminer :

(a) $A \setminus B$:

(b) $B \setminus A$:

(c) $(A \setminus B) \setminus C$:

(d) $A \setminus (B \cap C)$:

3. Donner le cardinal de $A \times B$.

.....

Exercice 03 *Algèbre de Boole*

(5 points)

Dans cet exercice, toutes les variables sont des variables booléennes.

1. Simplifier les expressions booléennes suivantes :

(a) $a + \bar{a}$:

(b) $a \cdot (\bar{a} + b)$:

(c) $\overline{a + b} \cdot \bar{b}$:

(d) $a + a \cdot \bar{b}$:

2. Pour un projet d'irrigation automatisée avec capteurs, trois variables booléennes contrôlent l'alarme :

- a=1 si le niveau d'eau est bas
- b=1 si le sol est sec
- c=1 si la pompe est en marche

L'alarme s'active si au moins une des trois conditions suivantes est vraie :

- le niveau d'eau est bas et le sol est sec
- le sol est sec et la pompe est active
- le niveau d'eau est bas et la pompe est active

(a) Déterminer l'expression booléenne de F, traduisant que l'alarme est active, en fonction de a, b et c.

.....

(b) Faire le tableau de Karnaugh de F.

(c) En déduire une expression simplifiée de F.

.....

(d) Interpréter cette forme simplifiée.

.....

Exercice 04 *Théorie des ensembles*

(5 points)

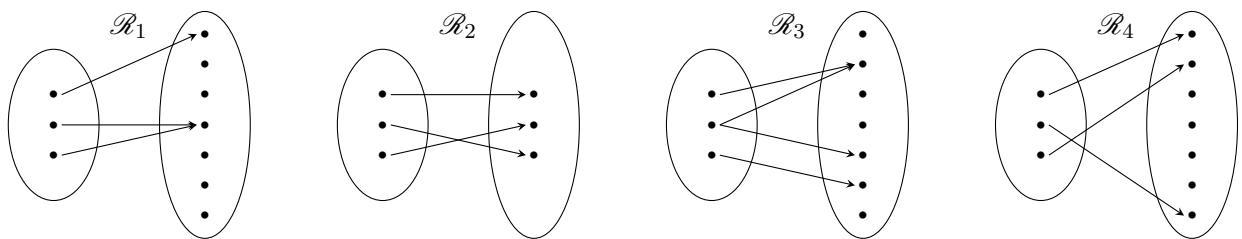
1. Dans cet exercice, on considère l'ensemble $E = \{-2; -1; 0; 1; 2\}$.

Représenter à l'aide d'un diagramme les différentes relations suivantes :

(a) $x \mathcal{R} y \iff x < y$

(b) $x \mathcal{R} y \iff x + y = 0$

2. Pour chacune des relations ci-dessous, dire si c'est une application, et si elle est injective, surjective, bijective ou rien du tout.



3. On considère l'application f de l'ensemble $E = \{0; 1; 2; 3; 4\}$ dans E , qui associe à tout élément de E son carré modulo 5.

(a) f est-elle injective ? surjective ?

.....

(b) Soit $g = f \circ f$. g est-elle injective ?

.....