

## DS n°2 : Logique et Ensembles

**Exercice 01** *Logique propositionnelle*

(5 points)

1. Dans chaque cas, donner un exemple :

(a) une proposition dont la valeur de vérité est fausse

.....

(b) deux propositions A et B telles que la proposition  $(A \vee B)$  est vraie

.....

2. Donner les valeurs de vérité des propositions suivantes :

(a)  $(3 < 0) \wedge (1 < 4)$  : .....

(c)  $((7 \neq 2) \vee (3 < 5)) \wedge (2^4 < 4^2)$  : .....

(b)  $(\pi > 6) \vee (\pi < 20)$  : .....

(d)  $(4 = 1) \implies (1 + 1 = 2)$  : .....

3. Soient P et Q deux propositions.

(a) Compléter la table de vérité de  $(P \implies Q) \iff P$ .

P	Q	$P \implies Q$	$(P \implies Q) \iff P$
F	F		
F	V		
V	F		
V	V		

(b) Donner une proposition équivalente à  $(P \implies Q) \iff P$ .

.....

**Exercice 02** *Calcul ensembliste*

(3 points)

On considère les ensembles  $E = \{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7\}$ ,  $A = \{1; 3; 5; 7\}$ ,  $B = \{3; 4; 6\}$  et  $C = \{1; 5; 6\}$ .

1. Déterminer les ensembles suivants :

(a)  $A \cup C$  : .....

(b)  $\bar{B} \cap C$  : .....

2. On note  $A \Delta B = \{x \in E, (x \in A \cup B) \wedge (x \notin A \cap B)\}$ . Déterminer :

(a)  $A \Delta B$  : .....

(b)  $B \Delta C$  : .....

3. Donner le cardinal de  $\mathcal{P}(B)$ .

.....

**Exercice 03** *Algèbre de Boole*

(5 points)

Sur un site de commerce en ligne, chaque utilisateur doit créer un mot de passe de 8 à 16 caractères. Ces caractères peuvent être des lettres majuscules de l'alphabet ou des chiffres ou des caractères spéciaux (comme ?, &, # ...).

Pour être valide, un mot de passe doit remplir au moins l'une des trois conditions suivantes :

- il contient au moins trois chiffres et au moins deux caractères spéciaux
- il contient moins de trois chiffres, au moins deux caractères spéciaux et au moins dix lettres
- il contient moins de deux caractères spéciaux et au moins dix lettres

1. Les mots de passe suivants sont-ils valides ? Justifier.

- (a) ABCDABCD : .....
- (b) ?# : .....
- (c) STU27ABCABCDE& : .....

2. On définit les variables booléennes a, b et c de la manière suivante :

- a=1 lorsque le mot de passe contient au moins trois chiffres, a=0 sinon
- b=1 lorsque le mot de passe contient au moins deux caractères spéciaux, b=0 sinon
- c=1 lorsque le mot de passe contient au moins dix lettres, c=0 sinon

(a) On appelle E l'expression booléenne qui traduit la validité d'un mot de passe.

Donner l'expression de E en fonction des variables booléennes a,b et c :

E = .....

(b) Faire le tableau de Karnaugh de E.

(c) En déduire une expression simplifiée de E.

E = .....

(d) Traduire par une phrase l'expression simplifiée de E.

.....

3. Déterminer l'expression booléenne de  $\bar{E}$ .

$\bar{E}$  = .....

**Exercice 04** *Théorie des ensembles*

(6 points)

1. Dans cette question, on considère l'ensemble  $E = \{-2; -1; 0; 1; 2\}$ , ainsi que la relation  $\mathcal{R}$  de  $E$  définie par :  $x\mathcal{R}y \iff xy \leq 0$ .

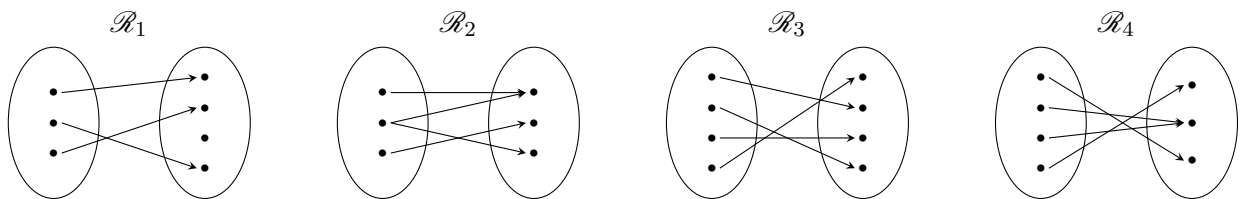
(a) Représenter  $\mathcal{R}$  à l'aide d'un diagramme.

(b) Une relation est dite **réflexive** si pour tout élément  $x$ ,  $x$  est en relation avec  $x$ .

$\mathcal{R}$  est-elle réflexive?

.....  
 .....

2. Pour chacune des relations ci-dessous, dire si c'est une application, et si elle est injective, surjective, bijective ou rien du tout.



- $\mathcal{R}_1$  : .....
- $\mathcal{R}_2$  : .....
- $\mathcal{R}_3$  : .....
- $\mathcal{R}_4$  : .....

3. Dans un système informatique, on considère les 3 ensembles suivants :

- $E = \{u_1, u_2, u_3, u_4\}$  : ensemble des utilisateurs du système
- $F = \{\text{Invité, Utilisateur, Administrateur}\}$  : ensemble des niveaux d'autorisation
- $G = \{0, 1\}$  : droits d'accès au panneau d'administration (1 = accès, 0 = pas d'accès)

On définit également deux applications :

- $f : E \rightarrow F$  : associe à chaque utilisateur son niveau d'autorisation, avec :

$$f(u_1) = \text{Utilisateur} \quad f(u_2) = \text{Invité} \quad f(u_3) = \text{Administrateur} \quad f(u_4) = \text{Invité}$$

- $g : F \rightarrow G$  telle que  $g(\text{Invité}) = 0$ ,  $g(\text{Utilisateur}) = 0$  et  $g(\text{Administrateur}) = 1$

(a) Représenter  $f$  et  $g$  à l'aide de diagrammes.

(b)  $f$  est-elle injective ? surjective ?

.....

(c) On note  $h = g \circ f$ . Déterminer  $h(u_1)$ ,  $h(u_2)$ ,  $h(u_3)$  et  $h(u_4)$ .

$$h(u_1) = \dots \quad h(u_2) = \dots \quad h(u_3) = \dots \quad h(u_4) = \dots$$

**Exercice 05** *Questions diverses pour avoir 20/20* (1 point)

1. Soient P et Q deux propositions. Quelle est la particularité de la proposition suivante ?

$$\ll (P \implies Q) \vee (Q \implies P) \gg$$

.....

2. Devant la salle du cours de Mathématiques, il est écrit :

$\ll$  Si la lumière est allumée, alors quelqu'un est dans la salle  $\gg$

Que signifie réellement cette phrase ?

.....

3. Donner la négation de la phrase suivante :

$\ll$  Dans tous les bars d'Ajaccio, il existe un client qui est assis.  $\gg$

.....

4. On considère l'application  $f$  de  $\mathbb{N}$  dans  $\mathbb{N}$  qui à tout entier naturel  $n$  associe le produit de ses chiffres. Par exemple,  $f(123) = 1 \times 2 \times 3 = 6$  et  $f(34) = 3 \times 4 = 12$ .

$f$  est-elle injective ? surjective ? Justifier !

.....

.....

5. Soit E un ensemble quelconque. Muni des opérations *union*, *intersection* et *complémentaire*, l'ensemble  $\{\emptyset, E\}$  est une algèbre de Boole.

Calculer  $\emptyset \Delta \emptyset$ ,  $\emptyset \Delta E$ ,  $E \Delta \emptyset$  et  $E \Delta E$  (voir ex. 2 pour  $\Delta$ ). Puis remarquer quelque chose...

.....

.....