Arithmétique

Exercice 01 Démontrer les propriétés suivantes :

1. La somme de deux nombres impairs est un nombre pair
2. Le produit de deux nombres impairs est un nombre impair
3. La somme de trois entiers consécutifs est divisible par 3

Exercice 02 Résoudre dans $\mathbb{N}$ les équations suivantes, d'inconnues a et b :

1. $ab = 15$
2. $a^3 - 3ab = 9$

Exercice 03 Déterminer tous les entiers relatifs n tels que :

1. $n+1 \mid 2n+5$
2. $n+4 \mid 3n-17$
3. $n+1 \mid n^2+3n+1$

Exercice 04 Démontrer que quelque soit l'entier naturel n, les nombres suivants sont premiers entre eux :

1. $3n-1$ et $5n-2$
2. $11n+6$ et $9n+5$

Exercice 05 Démontrer que le nombre $2 \times 3^{2015} + 1$ n'est divisible ni par 2, ni par 3.
Justifier sans calcul qu'il n'est pas divisible par 4.

Exercice 06 Un nombre entier a pour reste 35 dans la division euclidienne par 69. Dans la division par 75, il a pour reste 17. Quel est ce nombre ?

Exercice 07 On cherche à déterminer les entiers $n \in \mathbb{N}^*$ tels que $n^2 - 1$ est divisible par 3.

1. Pour $n = 1, 2, 3, 4...$, calculer $n^2 - 1$ et son reste dans la division euclidienne par 3.
   Émettre une conjecture sur les entiers n cherchés.
2. Dans une division euclidienne par 3, quels sont les restes possibles ?
   En déduire que tout entier naturel s'écrit sous la forme $3k$, $3k+1$ ou $3k+2$.
3. Démontrer la conjecture émise précédemment.

Exercice 08 Calculer le pgcd des nombres suivants :

1. $a = 390 \quad b = 525$
2. $a = 279 \quad b = 11222$
3. $a = 6! \quad b = 12^4$
4. $a = 2^{12} - 1 \quad b = 2^{11} - 1$

Exercice 09 On considère la suite (u_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par :

$$u_n = \frac{2n+5}{n+2}$$

1. Calculer u_0, u_1 et u_2. Que peut-on conjecturer concernant la fraction $\frac{2n+5}{n+2}$?
2. Démontrer cette conjecture.

Exercice 10 Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note :

$$U_n = \left\{ z \in \mathbb{C} \;/\; z^n = 1 \right\}$$

Soient m et n deux entiers naturels non nuls.

1. Démontrer que :

$$m \mid n \implies U_m \subset U_n$$

2. Soit $d = pgcd(m; n)$. Démontrer que :

$$U_d = U_m \cap U_n$$

Exercice 11 Soit $p \in \mathbb{N}$.

1. Démontrer l'équivalence : p pair $\iff$ p^2 pair.
2. Démontrer que $\sqrt{2}$ est irrationnel.

Exercice 12 Montrer que l'équation $x^3 - x^2 + x + 1 = 0$ n'a pas de solutions rationnelles.

Exercice 13 Résoudre dans $\mathbb{Z}^2$ les équations suivantes :

1. $2x + 5y = 3$
2. $323x - 391y = 612$
3. $162x + 207y = 27$
4. $221x + 247y = 15$

Exercice 14 Existe-t-il des points de droite Δ d'équation réduite $y = \frac{13}{25}x - \frac{1}{5}$ à coordonnées entières ?

Exercice 15 Existe-t-il un entier n tel que les nombres $\dfrac{n-6}{15}$ et $\dfrac{n-5}{12}$ soient tous deux entiers ?

Exercice 16 Décomposer en nombres premiers les nombres suivants, et en déduire le nombre de leurs diviseurs :

$$99 \qquad 135 \qquad 242 \qquad 986 \qquad 1264 \qquad 2397$$

Exercice 17 Quel est le plus petit entier qui, multiplié par 2016, donne un carré parfait ?

Exercice 18 Pour tout entier naturel n non nul, on note $\sigma(n)$ la somme de ses diviseurs.

1. Pour p premier et n entier non nul, calculer $\sigma(p)$ et $\sigma(p^n)$.
2. **(a)** Soit $n = p_1^{\alpha_1} \times p_2^{\alpha_2}$, où p_1 et p_2 sont deux nombres premiers distincts, et $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{N}^*$. Démontrer que :
$$\sigma(n) = \frac{1 - p_1^{\alpha_1+1}}{1 - p_1} \times \frac{1 - p_2^{\alpha_1+1}}{1 - p_2}$$
   (b) Généraliser la formule précédente à un entier naturel n de la forme :
$$n = p_1^{\alpha_1} \times p_2^{\alpha_2} \times \ldots \times p_r^{\alpha_r}$$
3. Calculer la somme des diviseurs des nombres 3 267 et 14 000.

Exercice 19 Soient $a, n \in \mathbb{N} \setminus \{0;1\}$.

1. Démontrer que : $a^n - 1$ est premier $\implies$ $a = 2$ et n est premier.
2. Vérifier que $2^{11} - 1$ n'est pas premier. Conclusion ?

Exercice 20

1. Soit q un entier impair. Démontrer que pour tout réel x : $x^q + 1 = (x+1)(x^{q-1} - x^{q-2} + \ldots + 1)$
2. Soit $m \in \mathbb{N}^*$ tel que $2^m + 1$ soit premier. Montrer alors que $m = 2^n$, avec $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 21 Soit q un entier. Trouver un intervalle de longueur q ne contenant pas de nombres premiers.

Exercice 22

1. Soit p un nombre premier. Montrer que $p \mid \begin{pmatrix} p \\ k \end{pmatrix}$ pour tout $k \in [\![1;p-1]\!]$.
2. En déduire que si p est un nombre premier et si a est un entier quelconque, alors $a^p - a$ est un multiple de p.