Continuité - Théorème des valeurs intermédiaires

Exercice 01 Déterminer les limites suivantes :

a. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x\sin x}{1-\cos x}$

b. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sin(3\pi x)}{\sin(4\pi x)}$

c. $\lim\limits_{x\to 0} xe^{\frac{1}{x}}$

d. $\lim\limits_{x\to 0} x^x$

e. $\lim\limits_{x\to \pi} \dfrac{\sin^2 x}{1+\cos x}$

f. $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{\sin(ax)-\sin\left(x^2\right)}{a-x}$

g. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x-1}{x^n-1}$

h. $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{4}} \dfrac{\sin x-\cos x}{x-\frac{\pi}{4}}$

i. $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{E(x)}{x}$

j. $\lim\limits_{x\to +\infty} x.E(\dfrac{1}{x})$

k. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^2+2E(x)}{x}$

l. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1+x^2}}{x}$

Exercice 02 Déterminer, si elles existent, les limites suivantes :

a. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x}{2+\sin\frac{1}{x}}$

b. $\lim\limits_{x\to +\infty} (\ln(1+e^{-x}))^{\frac{1}{x}}$

c. $\lim\limits_{x\to 0^+} x^{\frac{1}{\ln(e^x-1)}}$

d. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{\sqrt{1-\cos x}}$

e. $\lim\limits_{x\to +\infty} \sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}-\sqrt{x}$

f. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\tan x-\sin x}{\sin x(\cos 2x-\cos x)}$

g. $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{x^4}{1+x^\alpha \sin x}$, $\alpha\in\mathbb{R}$

h. $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{x^x-1}{\ln(x+1)}$

i. $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{(x+1)^x}{x^{x+1}}$

Exercice 03 Étudier la limite suivante, pour $(a\ ;\ b)\in{\mathbb{R}_+^*}^2$:

$$\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{a^x+b^x}{2}\right)^{\frac{1}{x}}$$

Exercice 04 Montrer que la fonction $x\longmapsto \sin\frac{1}{x}$ n'est pas prolongeable par continuité en 0.

Exercice 05 Les fonctions suivantes sont-elles prolongeables par continuité sur $\mathbb{R}$?

a. $f : x\longmapsto x\sin\frac{1}{x}$

b. $g : x\longmapsto \frac{1}{x}\ln\left(\frac{e^x+e^{-x}}{2}\right)$

c. $h : x\longmapsto \frac{1}{1-x}-\frac{2}{1-x^2}$

d. $i : x\longmapsto \sin x.\sin\frac{1}{x}$

e. $j : x\longmapsto \cos x.\cos\frac{1}{x}$

f. $k : x\longmapsto E(x)+\sqrt{x-E(x)}$

Exercice 06 Démontrer que tout polynôme de degré impair admet au moins une racine.

Exercice 07 Que peut-on dire d'une fonction f périodique et qui admet une limite finie en $+\infty$?

Exercice 08 Soit $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ continue et telle que pour tout réel x, $f(x)^2=1$. Démontrer que $f=1$ ou $f=-1$.

Exercice 09 Soient a et b deux réels tels que $a<b$. Soit $f:[a;b]\longrightarrow[a;b]$ continue.
Démontrer que f admet un point fixe (i.e $\exists\ c\in[a;b]\ /\ f(c)=c$).

Exercice 10 Soit f une fonction définie et continue sur $\mathbb{R}$, périodique de période $T>0$.

1. Montrer que l'équation $f(x)=f\left(x+\dfrac{T}{2}\right)$ admet une infinité de solutions sur $\mathbb{R}$.
2. **Application :** démontrer que sur Terre, il existe deux points aux antipodes l'un de l'autre où la température y est strictement identique.

Exercice 11 Pour chaque équation suivante, discuter du nombre de solutions dans I suivant la valeur du réel $a \in \mathbb{R}$.

1. $x^3 - 3x^2 - 1 = a$ $\qquad I = \mathbb{R}$
2. $x^3 + x^2 - 4x + 1 = a$ $\qquad I = \mathbb{R}$
3. $\ln x = ax$ $\qquad I =]0;+\infty[$

Exercice 12 Étudier la fonction f définie sur $]-1;+\infty[$ par $f(x) = \dfrac{1-x}{x^3+1}$.

Exercice 13 Pour tout entier naturel n, on considère l'application f_n définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f_n(x) = x^n + x - 1$$

1. Montrer que pour tout n, l'équation $f_n(x) = 0$ admet une unique solution x_n appartenant à l'intervalle $[0;1]$.
2. Pour $x \in]0;1[$, montrer que $f_{n+1}(x) \leqslant f_n(x)$.
3. En déduire que la suite (x_n) est monotone et convergente. Quelle est sa limite ?

Exercice 14 On s'intéresse aux solutions de l'équation (E) :

$$\ln\left(x^n\right) = x$$

d'inconnue $x \in]0;+\infty[$, où n est un entier naturel non nul.
On considère la fonction f définie sur $]0;+\infty[$ par $f(x) = \dfrac{\ln x}{x}$.

1. Démontrer que $(E) \iff f(x) = \dfrac{1}{n}$
2. Étudier les variations de f sur $]0;+\infty[$.
3. Discuter, suivant les valeurs de l'entier naturel n non nul, le nombre de solutions de $f(x) = \dfrac{1}{n}$ sur $]0;+\infty[$.
4. Pour tout entier $n \geqslant 3$, on appelle u_n la solution de (E) sur $[1;e]$.
   (a) Démontrer que $(u_n)_{n\geqslant 3}$ est bien définie.
   (b) Démontrer que (u_n) est décroissante.
   (c) La suite (u_n) est-elle convergente ? Si oui, déterminer sa limite.

Exercice 15 Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x) = \dfrac{x}{1+|x|}$.
Montrer que f réalise une bijection de $\mathbb{R}$ dans $[-1;1]$ et donner une expression de f^{-1}.

Exercice 16 Démontrer que les fonctions suivantes sont bijectives, et déterminer une expression de $f^{-1}(x)$, en précisant les ensembles de départ et d'arrivée :

1. $f(x) = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$
2. $g(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$