Équations - Inéquations - Partie Entière

Exercice 01 Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations et inéquations suivantes :

$$\sqrt{x+1}=3x-7 \qquad \sqrt{x^2-3}=5x-9 \qquad \sqrt{x+4}+\sqrt{x+2}=1$$

$$\sqrt{x+4}-\sqrt{x+2}=1 \qquad \sqrt{x+2\sqrt{x-1}}+\sqrt{x-2\sqrt{x-1}}=1$$

$$\frac{x+5}{2x-1}-\frac{2x-1}{x+5}<2 \qquad \frac{x^2-2x-9}{x^2-x-2}\leqslant 1 \qquad \frac{1}{x}+\frac{1}{x-8}>\frac{1}{x+1} \qquad 2x+1<\sqrt{x^2+8} \qquad \sqrt{1-x^2}\leqslant x$$

Exercice 02 Démontrer que pour tout entier naturel n non nul, on a :

$$\frac{2n+2}{2n+3}\leqslant\frac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{n+2}}$$

Exercice 03 Soit $u_n=\frac{(n!)^2}{(2n)!}4^n$ pour tout entier naturel n.
Démontrer que (u_n) est croissante et en déduire l'inégalité suivante, pour tout entier naturel n :

$$\frac{1}{(n!)^2}\leqslant\frac{4^n}{(2n)!}$$

Exercice 04 Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes, en fonction du paramètre m :

1. $(m+1)x+2-m=0$
2. $x^2+mx-6m^2=0$
3. $(m-1)x^2+(2m+3)x+m+2=0$
4. $\sqrt{mx+1}=mx-1$

Exercice 05 Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations et inéquations suivantes :

$$|x+3|-|x-1|=|2x+1| \qquad |x^2|-|x|=1 \qquad |x^2-1|+|x+1|=2$$

$$|x+3|\leqslant 5 \qquad |2x-4|\leqslant|x+2| \qquad 3|x-1|\leqslant 2|x+2| \qquad |x^2-1|+3|x-2|+7\leqslant 0$$

Exercice 06 Démontrer que : $\forall n\in\mathbb{N},\forall x\in\mathbb{R},\quad |\sin(nx)|\leqslant n|\sin x|$

Exercice 07 Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

$$\lfloor x\rfloor=2 \qquad \lfloor x+2\rfloor=3 \qquad \left\lfloor x+\frac{1}{3}\right\rfloor=1 \qquad \left\lfloor x-\frac{1}{4}\right\rfloor=0$$

Exercice 08 Soit $n\in\mathbb{N}$.

1. Démontrer que $(2+\sqrt{3})^n+(2-\sqrt{3})^n$ est un entier pair.
2. En déduire que $\lfloor(2+\sqrt{3})^n\rfloor$ est pair.

Exercice 09 Soit $x\in\mathbb{R}$.

1. Démontrer que pour tout entier k, $\lfloor x+k\rfloor=\lfloor x\rfloor+k$
2. Démontrer que $\lfloor x\rfloor+\lfloor x+\frac{1}{2}\rfloor=\lfloor 2x\rfloor$.
3. Plus généralement, démontrer que pour tout $n\geqslant 2$:

$$\sum_{k=0}^{n-1}\left\lfloor x+\frac{k}{n}\right\rfloor=\lfloor nx\rfloor$$

Exercice 10 Pour tout réel $x\geqslant 0$, comparer $\lfloor\sqrt{x}\rfloor$ et $\lfloor\sqrt{\lfloor x\rfloor}\rfloor$.

Exercice 11 Calculer : $\displaystyle\sum_{k=1}^{2023}\left\lfloor\sqrt{k}\right\rfloor$

Exercice 12 Calculer : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}\lfloor kx\rfloor$

Exercice 13 Résoudre dans $\mathbb{R}^+$: $\quad x\lfloor x\lfloor x\lfloor x\rfloor\rfloor\rfloor=88$