Fonctions

Exercice 01 Étude complète (ensemble de définition, parité, périodicité, variations, asymptotes) et graphe des fonctions suivantes :

$$f_1(x)=3x^4-5x^2+1 \qquad f_2(x)=\frac{e^x-1}{e^x+1} \qquad f_3(x)=\frac{x^4-1}{x^4+1}$$

$$f_4=\sin(x)-x \qquad f_5(x)=\frac{\sin x}{\sin x+1} \qquad f_6(x)=\cos x-\sin x$$

$$f_7(x)=2\cos(x)+\cos(2x) \qquad f_8(x)=\frac{\sin x}{2-\cos x} \qquad f_9(x)=\frac{2\sin x+1}{2\cos x+1}$$

Exercice 02 Soit $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$. Montrer que f s'écrit de manière unique comme la somme d'une fonction paire et d'une fonction impaire.

Exercice 03 Démontrer les inégalités suivantes :

$$\forall x\geqslant 0,\ \sin x\leqslant x \qquad \forall x\in\mathbb{R},\ e^x\geqslant 1+x \qquad \forall x\in\,]-1;+\infty[,\ \ln(1+x)\leqslant x$$

Exercice 04 Montrer que les fonctions suivantes réalisent des bijections de I sur J, où J est un intervalle à préciser. Donner les fonctions réciproques associées.

1. $f(x)=\dfrac{x^2}{x^2+1}$ $\quad I=\mathbb{R}_+$
2. $f(x)=\dfrac{x}{x^2+1}$ $\quad I=[-1;1]$
3. $f(x)=\dfrac{1}{1+e^{-x}}$ $\quad I=\mathbb{R}$
4. $f(x)=\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}$ $\quad I=\mathbb{R}_+$
5. $f(x)=\dfrac{e^x-e^{-x}}{2}$ $\quad I=\mathbb{R}$
6. $f(x)=\dfrac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}$ $\quad I=\mathbb{R}$

Exercice 05 Démontrer que les fonctions suivantes sont bijectives sur I, et donner l'équation de la tangente à la courbe $y=f^{-1}(x)$ au point $x=0$:

1. $f_1(x)=-1+e^{x-1}+\ln x$ $\quad I=\,]0;+\infty[$
2. $f_2(x)=4x+\sin^4(x)$ $\quad I=\mathbb{R}$

Exercice 06 Montrer que les fonctions suivantes réalisent des bijections de I sur J, où J est un intervalle à préciser. Exprimer dans chaque cas l'expression de la **dérivée** de la fonction réciproque associée.

1. $f(x)=\cos x$ $\quad I=[0;\pi]$
2. $f(x)=\sin x$ $\quad I=\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$
3. $f(x)=\tan x$ $\quad I=\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$

Exercice 07 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $f(x)=\frac{\ln x}{x}$.

1. Étudier la fonction f et tracer son graphe.
2. **Application :** déterminer tous les couples d'entiers naturels (a,b) tels que $a^b=b^a$.
3. Montrer que f réalise une bijection de $]0;e]$ sur J, où J est un intervalle à préciser.
4. Tracer le graphe de f^{-1} sur J.

Exercice 08 Quel est le maximum de $\sqrt[n]{n}$ pour $n\in\mathbb{N}^*$?

Exercice 09 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}\setminus\{-1\}$ par $f(x)=\frac{x}{x+1}$.

1. Déterminer $f^n(x)=f\circ f\circ\ldots\circ f(x)$, où $\circ$ apparaît n fois. Préciser l'ensemble de définition de f^n.
2. Déterminer $f^{(n)}(x)$ pour $n\geqslant 1$, où $f^{(n)}$ désigne la dérivée n-ième de f.

Exercice 10 Déterminer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$.