

Primitives - Intégrales

Exercice 01 Calculer les primitives des fonctions suivantes, sans se soucier de l'intervalle :

- | | | | | |
|------------------------|-------------------------|---------------------------|--------------------------|-------------------------------|
| 1. $x \mapsto \ln x$ | 3. $x \mapsto \ln(x+1)$ | 5. $x \mapsto \ln(1+x^2)$ | 7. $x \mapsto \arcsin x$ | 9. $x \mapsto \arctan x$ |
| 2. $x \mapsto x \ln x$ | 4. $x \mapsto x e^{-x}$ | 6. $x \mapsto x^2 e^x$ | 8. $x \mapsto \arccos x$ | 10. $x \mapsto e^{\arccos x}$ |

Exercice 02 Calculer les primitives des fonctions suivantes, sans se soucier de l'intervalle :

- | | | | |
|--------------------------------------|--|--------------------------------------|-------------------------------------|
| 1. $x \mapsto \frac{1}{2x^2+5x+2}$ | 3. $x \mapsto \frac{x^2+2}{2x^2-5x+2}$ | 5. $x \mapsto \frac{2x-1}{x^2-6x-9}$ | 7. $x \mapsto \frac{2-x}{x^2-2x+2}$ |
| 2. $x \mapsto \frac{x+2}{4x^2+2x-2}$ | 4. $x \mapsto \frac{1}{9x^2-12x+4}$ | 6. $x \mapsto \frac{1}{x^2+2x+2}$ | 8. $x \mapsto \frac{1}{x^2+x+1}$ |

Exercice 03 Calculer les primitives des fonctions suivantes, sans se soucier de l'intervalle :

- | | | | |
|---------------------------------|---------------------------------|---------------------------------|-------------------------------------|
| 1. $x \mapsto \frac{1}{\sin x}$ | 2. $x \mapsto \frac{1}{\cos x}$ | 3. $x \mapsto \frac{1}{\tan x}$ | 4. $x \mapsto \frac{1}{2+\sin^2 x}$ |
|---------------------------------|---------------------------------|---------------------------------|-------------------------------------|

Exercice 04 Calculer les intégrales suivantes :

- | | | |
|-------------------------------------|----------------------------------|--|
| 1. $\int_0^2 \frac{1}{t^2+4} dt$ | 3. $\int_2^3 \frac{1}{1-t^2} dt$ | 5. $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(1+\tan t) dt$ |
| 2. $\int_0^1 \frac{1}{t^2+4t+5} dt$ | 4. $\int_0^{2\pi} \cos^2 t dt$ | 6. $\int_0^{2\pi} \cos(mt)\cos(nt) dt$ |

Exercice 05 Calculer les intégrales suivantes :

- | | | | |
|---|-----------------------------------|---|---|
| 1. $\int_0^{\frac{\pi}{3}} t \cos t dt$ | 4. $\int_0^{\pi} (t-1) \sin t dt$ | 7. $\int_0^{2\pi} t \sin^3 t dt$ | 10. $\int_0^1 \ln(1+t^2) dt$ |
| 2. $\int_1^2 \ln t dt$ | 5. $\int_1^e t^2 \ln t dt$ | 8. $\int_1^e t^n \ln t dt \ (n \in \mathbb{N})$ | 11. $\int_0^1 t \arctan^2 t dt$ |
| 3. $\int_0^1 t e^t dt$ | 6. $\int_0^1 \arctan t dt$ | 9. $\int_0^1 t \arctan t dt$ | 12. $\int_0^1 \frac{t \ln t}{(t^2+1)^2} dt$ |

Exercice 06 On pose :

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{8}} e^{-2t} \cos^2 t dt \qquad J = \int_0^{\frac{\pi}{8}} e^{-2t} \sin^2 t dt \qquad K = \int_0^{\frac{\pi}{8}} e^{-2t} \cos 2t dt$$

Calculer K , $I+J$ et $I-J$, et en déduire les valeurs de I et J .

Exercice 07 Calculer les intégrales suivantes :

- | | | | |
|--|--|--|--|
| 1. $\int_1^e \frac{dt}{t+t(\ln t)^2}$ | 4. $\int_1^3 \frac{dt}{\sqrt{t}+\sqrt{t^3}}$ | 7. $\int_0^1 \frac{e^{2t} dt}{e^t+1}$ | 10. $\int_0^1 \sqrt{1-t^2} dt$ |
| 2. $\int_1^e \frac{dt}{t\sqrt{\ln t+1}}$ | 5. $\int_1^e \frac{\ln t dt}{t+t(\ln t)^2}$ | 8. $\int_1^4 \frac{1-\sqrt{t}}{\sqrt{t}} dt$ | 11. $\int_0^1 t^2 \sqrt{t^2-1} dt$ |
| 3. $\int_0^1 \frac{dt}{e^t+1}$ | 6. $\int_1^e \frac{(\ln t)^n}{t} dt$ | 9. $\int_1^2 \frac{dt}{t\sqrt{t^2-1}}$ | 12. $\int_1^2 \frac{\ln t}{\sqrt{t}} dt$ |

Exercice 08 Montrer que :

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos t}{\cos t + \sin t} dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin t}{\cos t + \sin t} dt = \frac{\pi}{4}$$

En déduire la valeur de :

$$I = \int_0^1 \frac{dt}{t + \sqrt{1-t^2}}$$

Exercice 09 Calculer les intégrales suivantes :

1. $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin^3 t}{1 + \cos^2 t} dt$

3. $\int_0^{\frac{\pi}{3}} (1 + \cos t) \tan t dt$

5. $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^3 t}{\sin t} dt$

2. $\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{dt}{\sin t}$

4. $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos^3 t + \cos t} dt$

Exercice 10 Soit $I = \int_1^{\frac{5}{2}} \sqrt{-t^2 + 2t + 8} dt$.

1. Mettre le trinôme sous forme canonique.
2. En effectuant 2 changements de variables, calculer la valeur de I .

Exercice 11 Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{1+x} dx$.

1. Démontrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n = 0$.
2. Calculer $I_n + I_{n+1}$.
3. En déduire :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k+1}$$

Exercice 12 Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx$.

1. Calculer I_0 et I_1 .
2. Montrer que la suite (I_n) converge.
3. Établir une formule de récurrence entre I_{n+2} et I_n .
4. Montrer que $(n+1)I_n I_{n+1}$ est constant.
5. Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n$.
6. Exprimer I_{2n} et I_{2n+1} en fonction de n .

Exercice 13 Pour tout entier naturel n , on pose : $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^n x dx$

1. Calculer I_0, I_1 puis $I_n + I_{n+2}$ pour tout entier n .
2. Donner une expression de I_n sous forme de somme.
3. Démontrer que la suite (I_n) converge vers 0, et en déduire :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \dots + \frac{(-1)^n}{2n+1} \right)$$