Logique

Exercice 01 Ecrire avec des quantificateurs les propositions suivantes puis dans chaque cas dire si la proposition est vraie ou fausse.

1. Tout entier naturel est pair ou impair.

2. Tout entier naturel est pair ou tout entier naturel est impair.

3. Pour chaque entier, on peut trouver un entier strictement plus grand.

4. Il y a un entier plus grand que tous les entiers.

Exercice 02 Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Exprimer à l'aide de quantificateurs les phrases suivantes puis donner leur négation.

1. f est la fonction nulle

2. f est une fonction constante

3. L'équation $f(x) = 0$ admet une solution

4. L'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution

5. f est l'identité de $\mathbb{R}$

6. Le graphe de f coupe la droite d'équation $y = x$

7. f est croissante sur $\mathbb{R}$

8. L'équation $\sin x = x$ admet une solution dans $\mathbb{R}$

Exercice 03 Soit (u_n) une suite de nombres réels.
Exprimer à l'aide de quantificateurs les phrases suivantes puis donner leur négation.

1. La suite (u_n) est majorée

2. La suite (u_n) est bornée

3. La suite (u_n) est décroissante

4. La suite (u_n) est monotone

Exercice 04 Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$. Traduire à l'aide de quantificateurs la proposition « f n'est pas périodique ».

Exercice 05 Donner la négation des propositions suivantes :

1. $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) \neq 0$

2. $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) > 0 \implies x \leqslant 0$

3. $\exists\, M \in \mathbb{R} \;/\; \forall x \in \mathbb{R}, f(x) < M$

4. $\forall M \in \mathbb{R}, \exists\, x \in \mathbb{R} \;/\; f(x) < M$

5. $\forall M > 0, \exists\, A > 0 \;/\; \forall x \geqslant A, f(x) > M$

6. $\forall \epsilon > 0, \exists\, N \in \mathbb{N} \;/\; (n \geqslant N \implies u_n < \epsilon)$

Exercice 06 Soient a et $b \geqslant 0$. Démontrer que si $\frac{a}{1+b} = \frac{b}{1+a}$, alors $a = b$.

Exercice 07 Démontrer que : $\sqrt{n^2+1} \in \mathbb{N} \iff n = 0$.

Exercice 08 Soit n un entier naturel. Démontrer l'équivalence :

$$n \text{ est pair} \iff n^2 \text{ est pair}$$

Exercice 09 Démontrer que toute fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ se décompose de manière unique comme somme d'une fonction paire et d'une fonction impaire. Donner la décomposition de $f(x) = \frac{x+1}{x^2+x+1}$.

Exercice 10 Démontrer que toute suite réelle (u_n) convergente se décompose de manière unique comme somme d'une suite constante et d'une suite convergente vers 0.

Exercice 11 Déterminer toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ telles que :

$$\forall (x;y) \in \mathbb{R}^2,\ f(x)f(y) - f(xy) = x + y$$

Exercice 12 Déterminer toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ telles que :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) + xf(1-x) = x + 1$$