Révisions - Janvier 2019

Définitions et Notations

Exercice 01 Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

1. $|x|^2 - |x| = 1$
2. $|x^2 - 1| + |x+1| = 2$
3. $\lfloor x-3 \rfloor = 1$

Exercice 02 Calculer les sommes et produits suivants :

1. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)}$
2. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+2)}$
3. $\displaystyle\prod_{k=1}^{n} 1+\frac{1}{k}$
4. $\displaystyle\prod_{k=1}^{n} 1-\frac{1}{k^2}$

Exercice 03 Calculer les sommes suivantes :

1. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k}$
2. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k}$
3. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k \binom{n}{k}$

Exercice 04 Déterminer la somme des carrés des n premiers entiers en calculant $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} (k+1)^3 - k^3$ de deux façons.

Fonctions usuelles

Exercice 05 Déterminer l'ensemble de définition puis calculer la dérivée des fonctions suivantes :

1. $f : x \longrightarrow \ln(x \ln x)$
2. $g : x \longrightarrow \ln(\arccos x)$
3. $h : x \longrightarrow \arccos(\arcsin x)$

Exercice 06 Démontrer que la fonction $x \longmapsto \arccos x + \arcsin x$ est constante et déterminer sa valeur.

Exercice 07 Calculer les intégrales suivantes :

1. $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{t^2+4t+5}\,dt$
2. $\displaystyle\int_2^3 \frac{1}{1-t^2}\,dt$
3. $\displaystyle\int_0^2 \frac{1}{t^2+4}\,dt$

Exercice 08 Déterminer une primitive des fonctions suivantes :

1. $x \longmapsto \arctan x$
2. $x \longmapsto (\ln x)^2$
3. $x \longmapsto \sin(\ln x)$

Exercice 09 Les fonctions suivantes sont-elles injectives ? surjectives ? bijectives ?

1. $f : \mathbb{R} \longrightarrow [0;+\infty[, x \longmapsto x^2$
2. $g : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}, x \longmapsto \arctan(x^2)$
3. $h : \mathbb{R} \longrightarrow \left[1;\sqrt{3}\right], x \longmapsto \sqrt{2-\sin(x^2)}$
4. $i : \mathbb{R} \longrightarrow [0;+\infty[, x \longmapsto |x|$

Exercice 10 Montrer que la fonction :

$$\begin{array}{rccc} f : &]1;+\infty[& \longrightarrow &]0;+\infty[\\ & x & \longmapsto & \frac{1}{1-x} \end{array}$$

est bijective, et déterminer sa bijection réciproque.

Équations différentielles

Exercice 11 Résoudre les équations différentielles suivantes :

1. $y' + \tan x.y = \sin 2x, \quad y(0) = 1 \quad \text{sur } \left]-\frac{\pi}{2}\,;\frac{\pi}{2}\right[$
2. $(x+1)y' + xy = x^2 - x + 1, \quad y(1) = 1 \quad \text{sur }]-1\,;+\infty[$
3. $y'' - 2y' + 2y = \sin x, \quad y(0) = y'(0) = 2 \quad \text{sur } \mathbb{R}$

Logique, ensembles et applications

Exercice 12 Soient $f : E \longrightarrow F$ et $g : F \longrightarrow G$ deux applications. Démontrer les implications suivantes :

1. f et g injectives $\implies$ $g \circ f$ injective
2. f et g surjectives $\implies$ $g \circ f$ surjective
3. $g \circ f$ injective $\implies$ f injective
4. $g \circ f$ surjective $\implies$ g est surjective
5. f et g bijectives $\implies$ $g \circ f$ bijective Réciproque ?

Exercice 13 Soit $f : E \longrightarrow F$. Soient A et B deux parties de E.

1. Démontrer que $A \subset B \implies f(A) \subset f(B)$. Réciproque ?
2. Démontrer que $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$. Inclusion réciproque ?
3. Démontrer que $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$.

Exercice 14 Les applications suivantes sont-elles injectives, surjectives, bijectives ?
Dans le cas d'application bijective, donner sa bijection réciproque.

1. $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}, \ n \mapsto n+1$
2. $f : \mathbb{N}^2 \longrightarrow \mathbb{N}, \ (n\ ;\ m) \mapsto n + 2m$
3. $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}^2, \ n \mapsto (n\ ;\ n+2)$
4. $f : \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^* \longrightarrow \mathbb{Q}, \ \big(p\ ;\ q\big) \mapsto p + \frac{1}{q}$

Nombres complexes et Trigonométrie

Exercice 15 Exprimer $\cos(4x)$ et $\sin(4x)$ comme polynômes en $\cos x$ et $\sin x$.

Exercice 16 Linéariser $\cos^4 x$ et $\sin^4 x$. (les exprimer en fonction de $\cos(kx)$ et $\sin(kx)$, avec $k \in \{1,2,3,4\}$)

Exercice 17 Résoudre dans $\mathbb{R}^2$ puis dans $\mathbb{C}^2$ le système : $\left\{\begin{array}{rcl} x+y & = & 4 \\ xy & = & 6 \end{array}\right.$

Exercice 18 Soit ω une racine n-ième de l'unité. Calculer $S(\omega) = \sum_{k=0}^{n} (k+1)\omega^k$.

Exercice 19 Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On note U_n l'ensemble des racines n-ièmes de l'unité. Calculer $\sum_{z \in U_n} |z-1|$.

Exercice 20 Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $\omega_n = e^{\frac{2i\pi}{n}}$

1. Calculer le produit des racines n-ièmes de l'unité.
2. Pour tout entier p, calculer $\sum_{k=0}^{n-1} \omega^{kp}$.
3. En déduire que $\sum_{k=0}^{n-1} (1+\omega^k)^n = 2n$.

Systèmes Linéaires

Exercice 21 Résoudre les systèmes suivants en fonction du paramètre $m \in \mathbb{C}$:

1. $\left\{\begin{array}{rcl} x+my & = & -3 \\ mx+4y & = & 6 \end{array}\right.$ **2.** $\left\{\begin{array}{rcl} 3x+y-z & = & 1 \\ x-2y+2z & = & m \\ x+y-z & = & 1 \end{array}\right.$ **3.** $\left\{\begin{array}{rcl} x-my+m^2z & = & m \\ mx-m^2y+mz & = & 1 \\ mx+y-m^3z & = & -1 \end{array}\right.$

Dénombrement

Exercice 22 On souhaite ranger sur une étagère 4 livres de mathématiques (distincts), 6 livres de physique, et 3 de chimie. De combien de façons peut-on effectuer ce rangement :

1. sans ordre particulier

2. en commençant par un livre de mathématiques

3. en regroupant les livres par matière

4. en regroupant seulement les livres de mathématiques

Exercice 23 Un code est composé de 8 chiffres de 0 à 9. Combien de codes différents y a-t-il :

1. si tous les chiffres sont différents

2. si le code est composé de deux chiffres différents, l'un apparaissant 1 fois et l'autre 7 fois

3. si le code contient 4 zéros

4. si le code est composé de deux chiffres différents

Exercice 24 Soit E un ensemble composé de n éléments.

1. Quel est le cardinal de l'ensemble $\mathscr{P}(E)$? (ensemble des parties de E)

2. Calculer la somme des cardinaux de toutes les parties de E.

Exercice 25 En répondant à la question "*comment choisir n éléments dans un ensemble à 2n éléments*", justifier que :

$$\begin{pmatrix} 2n \\ n \end{pmatrix} = \sum_{k=0}^{n} \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix}^2$$

Matrices

Exercice 26 Calculer la puissance n-ième des matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix} \qquad D = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

Exercice 27 On considère la matrice A suivante :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

On pose $B = A - I_3$.
Calculer B^n pour $n \in \mathbb{N}$ et en déduire A^n pour $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 28 Calculer (s'il existe) l'inverse des matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ -2 & -2 & -1 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & \alpha & \alpha^2 \\ \overline{\alpha} & 1 & \alpha \\ \overline{\alpha}^2 & \overline{\alpha} & 1 \end{pmatrix} \ (\alpha \in \mathbb{C})$$

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad E = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & \cdots & 1 \\ 0 & 1 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \cdots & 0 & 1 & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Exercice 29 Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 5 & -3 & 3 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$.

Calculer $(A + I_3)^3$ et en déduire que A est inversible, puis calculer A^{-1}.

Exercice 30 Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ nilpotente ($i.e. \exists p \in \mathbb{N}^* \ / \ A^p = O_n$).

Démontrer que $I_n - A$ est inversible et calculer son inverse.