Calculs d'Intégrales

Exercice 01 Calculer les intégrales suivantes :

1. $\displaystyle\int_0^2 \frac{1}{t^2+4}\,dt$
2. $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{t^2+4t+5}\,dt$
3. $\displaystyle\int_2^3 \frac{1}{1-t^2}\,dt$
4. $\displaystyle\int_0^{2\pi} \cos^2 t\,dt$
5. $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(1+\tan t)\,dt$
6. $\displaystyle\int_0^{2\pi} \cos(mt)\cos(nt)\,dt$

Exercice 02 Calculer les intégrales suivantes :

1. $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{3}} t\cos t\,dt$
2. $\displaystyle\int_1^2 \ln t\,dt$
3. $\displaystyle\int_0^1 te^t\,dt$
4. $\displaystyle\int_0^{\pi} (t-1)\sin t\,dt$
5. $\displaystyle\int_1^e t^2\ln t\,dt$
6. $\displaystyle\int_0^1 \arctan t\,dt$
7. $\displaystyle\int_0^{2\pi} t\sin^3 t\,dt$
8. $\displaystyle\int_1^e t^n\ln t\,dt$ $(n\in\mathbb{N})$
9. $\displaystyle\int_0^1 t\arctan t\,dt$
10. $\displaystyle\int_0^1 \ln(1+t^2)\,dt$
11. $\displaystyle\int_0^1 t\arctan^2 t\,dt$
12. $\displaystyle\int_0^1 \frac{t\ln t}{(t^2+1)^2}\,dt$

Exercice 03 Pour tout $n\in\mathbb{N}$, on pose :

$$I_n=\int_0^1 \frac{dt}{(t^2+1)^n}$$

1. Exprimer I_{n+1} en fonction de I_n.
2. En déduire la valeur de I_3.

Exercice 04 On pose, pour tout $n\in\mathbb{N}^*$:

$$I_n=\int_0^1 t^n e^{-t}\,dt$$

1. Montrer que I_n existe et est un nombre strictement positif. Calculer I_1.
2. Démontrer que pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $I_{n+1}=-\frac{1}{e}+(n+1)I_n$.
3. Calculer I_2 et I_3.
4. En déduire la valeur de $I=\displaystyle\int_0^1(-t^3+2t^2-t)e^{-t}\,dt$

Exercice 05 On pose :

$$I=\int_0^{\frac{\pi}{8}} e^{-2t}\cos^2 t\,dt \qquad J=\int_0^{\frac{\pi}{8}} e^{-2t}\sin^2 t\,dt \qquad K=\int_0^{\frac{\pi}{8}} e^{-2t}\cos 2t\,dt$$

Calculer K, $I+J$ et $I-J$, et en déduire les valeurs de I et J.

Exercice 06 Calculer les intégrales suivantes :

1. $\displaystyle\int_1^e \frac{dt}{t+t(\ln t)^2}$
2. $\displaystyle\int_1^e \frac{dt}{t\sqrt{\ln t+1}}$
3. $\displaystyle\int_0^1 \frac{dt}{e^t+1}$
4. $\displaystyle\int_1^3 \frac{dt}{\sqrt{t}+\sqrt{t^3}}$
5. $\displaystyle\int_1^e \frac{\ln t\, dt}{t+t(\ln t)^2}$
6. $\displaystyle\int_1^e \frac{(\ln t)^n}{t}\, dt$
7. $\displaystyle\int_0^1 \frac{e^{2t}\, dt}{e^t+1}$
8. $\displaystyle\int_1^4 \frac{1-\sqrt{t}}{\sqrt{t}}\, dt$
9. $\displaystyle\int_1^2 \frac{dt}{t\sqrt{t^2-1}}$
10. $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{1-t^2}\, dt$
11. $\displaystyle\int_0^1 t^2\sqrt{t^2-1}\, dt$
12. $\displaystyle\int_1^2 \frac{\ln t}{\sqrt{t}}\, dt$

Exercice 07 Montrer que :

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos t}{\cos t+\sin t}\, dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin t}{\cos t+\sin t}\, dt = \frac{\pi}{4}$$

En déduire la valeur de :

$$I = \int_0^1 \frac{dt}{t+\sqrt{1-t^2}}$$

Exercice 08 Calculer les intégrales suivantes :

1. $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin^3 t}{1+\cos^2 t}\, dt$
2. $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{dt}{\sin t}$
3. $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{3}} (1+\cos t)\tan t\, dt$

Exercice 09 Soit $I = \displaystyle\int_1^{\frac{5}{2}} \sqrt{-t^2+2t+8}\, dt$.

1. Mettre le trinôme sous forme canonique.
2. En effectuant 2 changements de variables, calculer la valeur de I.

Exercice 10 Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $I_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{x^n}{1+x} dx$.

1. Démontrer que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} I_n = 0$.
2. Calculer $I_n + I_{n+1}$.
3. En déduire :

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k+1}$$

Exercice 11 Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $I_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx$.

1. Calculer I_0 et I_1.
2. Montrer que la suite (I_n) converge.
3. Établir une formule de récurrence entre I_{n+2} et I_n.
4. Montrer que $(n+1)I_n I_{n+1}$ est constant.
5. Calculer $\lim_{n\to+\infty} I_n$.
6. Exprimer I_{2n} et I_{2n+1} en fonction de n.

Exercice 12 Pour tout entier naturel n, on pose : $I_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^n x dx$

1. Calculer I_0, I_1 puis $I_n + I_{n+2}$ pour tout entier n.
2. Donner une expression de I_n sous forme de somme.
3. Démontrer que la suite (I_n) converge vers 0, et en déduire :

$$\lim_{n\to+\infty} \left(1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\ldots+\frac{(-1)^n}{2n+1}\right)$$

Exercice 13 Calculer les limites des suites (I_n) suivantes :

1. $I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{1+x^2} dx$
2. $I_n = \int_0^1 x^n (1-x)^n \, dx$
3. $I_n = \int_0^1 x^n \tan x dx$
4. $I_n = \int_0^1 t^n e^{-t^2} dt$
5. $I_n = \int_0^1 \frac{e^{nx}}{1+e^x} dx$
6. $I_n = \int_0^\pi \frac{\sin x}{x+n} dx$

Exercice 14 Soit f une fonction continue sur $[0;1]$. Calculer :

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 t^n f(t) dt$$

Exercice 15 Soit f une fonction de classe C^1 sur $[a;b]$. Démontrer que :

$$\lim_{n\to+\infty} \int_a^b \sin(nt) f(t) dt = 0$$

Exercice 16 Calculer la limite des suites suivantes :

1. $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k}$
2. $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{n}{(n+k)^2}$
3. $u_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)$
4. $u_n = \frac{\sqrt{1}+\sqrt{2}+\ldots+\sqrt{n-1}}{n\sqrt{n}}$
5. $u_n = \frac{1}{n} \prod_{k=1}^{n} (k+n)^{\frac{1}{n}}$
6. $u_n = \sum_{k=n}^{2n} \frac{1}{k}$

Exercice 17 Démontrer l'inégalité suivante :

$$\forall x > 0, \quad \left| \ln(1+x) - x + \frac{x^2}{2} \right| \leqslant \frac{x^3}{3}$$

En déduire une valeur approchée de $\ln(1,001)$ à 10^{-9} près.

Exercice 18 Calculer, en utilisant l'inégalité de Taylor-Lagrange, les limites des suites définies par :

1. $u_n = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \ldots + \frac{1}{n!}$
2. $v_n = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{(-1)^{n-1}}{n}$
3. $w_n = 1 - \frac{1}{2!} + \frac{1}{4!} + \ldots + \frac{(-1)^n}{(2n)!}$