Dérivabilité

Exercice 01 Soient f et g deux fonctions dérivables en un point a.

1. Démontrer que $f+g$ est dérivable en a et que $(f+g)'(a) = f'(a)+g'(a)$.
2. Démontrer que fg est dérivable en a et que $(fg)'(a) = f'(a)g(a)+f(a)g'(a)$.

Exercice 02 Soit f une fonction dérivable en un point a, et soit g la fonction définie par par $g(x) = \dfrac{xf(a)-af(x)}{x-a}$.
Démontrer que g est définie en a, et préciser $g(a)$.

Exercice 03 Les fonctions suivantes sont-elles dérivables en 0 ?

1. $f(x) = \dfrac{x}{1+|x|}$
2. $g(x) = \begin{cases} x\sin x \sin\dfrac{1}{x} & si \quad x \neq 0 \\ 0 & si \quad x = 0 \end{cases}$

Exercice 04 Les fonctions suivantes sont-elles de classe C^1 sur $\mathbb{R}$?

1. $f(x) = \begin{cases} x^2\sin\dfrac{1}{x} & si \quad x \neq 0 \\ 0 & si \quad x = 0 \end{cases}$
2. $g(x) = \begin{cases} x^3\sin\dfrac{1}{x} & si \quad x \neq 0 \\ 0 & si \quad x = 0 \end{cases}$

Exercice 05 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \begin{cases} 0 & si \quad x \leq 0 \\ e^{-\frac{1}{x}} & si \quad x > 0 \end{cases}$$

Démontrer que f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.

Exercice 06 Étudier la dérivabilité des fonctions suivantes :

1. $f(x) = \begin{cases} x\ln x & si \quad x > 0 \\ 0 & si \quad x = 0 \end{cases}$
2. $f(x) = x\sin\frac{1}{x}$
3. $f(x) = \begin{cases} x^2\ln x^2 & si \quad x \neq 0 \\ 0 & si \quad x = 0 \end{cases}$
4. $f(x) = \arctan\frac{x-1}{x+2}$
5. $f(x) = \begin{cases} 1-e^x & si \quad x \leq 0 \\ \frac{e^x-1}{e^x+1} & si \quad x > 0 \end{cases}$
6. $f(x) = 1-\cos\sqrt{|x|}$

Exercice 07 Démontrer que les inégalités suivantes :

1. $\forall x > 0 : x - \frac{x^3}{6} < \sin x < x$
2. $\forall x > 0 : x + \frac{x^3}{3} < \tan x$
3. $\forall x \in \left]0; \frac{\pi}{2}\right[: 3x < 2\sin x + \tan x$
4. $\forall x > -1 : \frac{x}{x+1} \leq \ln(1+x) \leq x$

Exercice 08 Démontrer que :

$$\forall (a;b) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}, \quad ab \leq a\ln a + e^{b-1}$$

☞ *Fixer une variable...*

Exercice 09 Rappeler et démontrer les formules de dérivations des fonctions arccos, arcsin et arctan.

Exercice 10 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \arctan(x) + \arctan(\frac{1}{x})$.

1. Étudier la continuité de f.
2. Calculer la dérivée f'.
3. Calculer $f(1)$ et $f(-1)$ et en déduire la valeur de $f(x)$ suivant les valeurs de x.

Exercice 11 Étudier la continuité et la dérivabilité de $f(x) = \arctan\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$.
En déduire une expression simplifiée de $f(x)$.

Exercice 12 Montrer que la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x|x|$ est bijective. Préciser f^{-1} et $(f^{-1})'$.

Exercice 13 Démontrer que l'équation $xe^x = 1$ admet une unique solution dans $\mathbb{R}$.

Exercice 14 On considère l'équation suivante :

$$\frac{e^x}{2(x+1)^2} = 1$$

Démontrer que cette équation admet 3 solutions x_1, x_2 et x_3 telles que :

$$-2 < x_1 < -1 < x_2 < 0 < 2 < x_3$$

Exercice 15 Pour tout entier naturel n, on considère la fonction f_n définie par :

$$f_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}$$

1. Conjecturer le nombre de solutions de l'équation $f_n(x) = 0$ en fonction de n.
2. Calculer $f_n'(x)$ et démontrer la conjecture précédente par récurrence.

Exercice 16 Démontrer que les courbes d'équations $y = x^2$ et $y = \frac{1}{x}$ ont une unique tangente commune.

Exercice 17 Calculer la dérivée n-ième des fonctions suivantes :

1. $f(x) = x^2 \sin x$
2. $g(x) = x^2(1+x)^n$
3. $h(x) = x^{n-1}\ln(1+x)$
4. $i(x) = e^x \cos x$