Déterminants

Exercice 01 Calculer les déterminants suivants :

$$A=\begin{vmatrix}1+a & a & a\\ b & 1+b & b\\ c & c & 1+c\end{vmatrix}\qquad D=\begin{vmatrix}1 & a^2 & a^3\\ 1 & b^2 & b^3\\ 1 & c^2 & c^3\end{vmatrix}\qquad G=\begin{vmatrix}a+b & b+c & c+a\\ a^2+b^2 & b^2+c^2 & c^2+a^2\\ a^3+b^3 & b^3+c^3 & c^3+a^3\end{vmatrix}$$

$$B=\begin{vmatrix}a & b & c\\ c & a & b\\ b & c & a\end{vmatrix}\qquad E=\begin{vmatrix}a & a & a & a\\ a & b & b & b\\ a & b & c & c\\ a & b & c & d\end{vmatrix}\qquad H=\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ \cos a & \cos b & \cos c\\ \sin a & \sin b & \sin c\end{vmatrix}$$

$$C=\begin{vmatrix}1 & a & a^2\\ 1 & b & b^2\\ 1 & c & c^2\end{vmatrix}\qquad F=\begin{vmatrix}a & c & c & b\\ c & a & b & c\\ c & b & a & c\\ b & c & c & a\end{vmatrix}\qquad I=\begin{vmatrix}1 & \cos a & \cos 2a\\ 1 & \cos b & \cos 2b\\ 1 & \cos c & \cos 2c\end{vmatrix}$$

Exercice 02 Calculer $\begin{vmatrix}a & b & c\\ a^2 & b^2 & c^2\\ a^3 & b^3 & c^3\end{vmatrix}$. En déduire $\begin{vmatrix}a+b & b+c & c+a\\ a^2+b^2 & b^2+c^2 & c^2+a^2\\ a^3+b^3 & b^3+c^3 & c^3+a^3\end{vmatrix}$.

Exercice 03 Calculer les déterminants suivants :

$$A=\begin{vmatrix}a_1 & a_2 & \dots & a_n\\ a_1 & a_1 & \ddots & \vdots\\ \vdots & \ddots & \ddots & a_2\\ a_1 & a_1 & \dots & a_1\end{vmatrix}\qquad B=\begin{vmatrix}1 & & & 1\\ 1 & 1 & (0) & \\ & \ddots & \ddots & \\ (0) & & 1 & 1\end{vmatrix}\qquad C=\begin{vmatrix}a+b & a & \dots & a\\ a & a+b & \ddots & \vdots\\ \vdots & \ddots & \ddots & a\\ a & \dots & a & a+b\end{vmatrix}$$

Exercice 04 Soient $a\neq b$ et $\lambda_1,\lambda_2,\dots,\lambda_n$ des réels. On pose :

$$\Delta_n(x)=\begin{vmatrix}\lambda_1+x & a+x & \dots & a+x\\ b+x & \lambda_2+x & \ddots & \vdots\\ \vdots & \ddots & \ddots & a+x\\ b+x & \dots & b+x & \lambda_n+x\end{vmatrix}$$

1. Montrer que $x\mapsto\Delta_n(x)$ est une fonction affine.

2. Calculer $\Delta_n(x)$ et en déduire $\Delta_n(0)$.

Exercice 05 Soit D_n le déterminant de taille n suivant :

$$D_n = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 2 & 3 & 1 & \ddots & \vdots \\ 0 & 2 & 3 & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \dots & 0 & 2 & 3 \end{vmatrix}$$

1. Donner une relation de récurrence entre D_{n+2}, D_{n+1} et D_n.

2. En posant $\Delta_n = D_n - D_{n-1}$, calculer D_n.

Exercice 06 Calculer :

$$\begin{vmatrix} 2a & a & \dots & (0) \\ a & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & a \\ (0) & & a & 2a \end{vmatrix}$$

Exercice 07 Calculer :

$$\begin{vmatrix} s_1 & \dots & \dots & s_1 \\ \vdots & s_2 & \dots & s_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ s_1 & s_2 & \dots & s_n \end{vmatrix}$$

Exercice 08 Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie et $f \in \mathscr{L}(E)$ tel que $f^2 = -Id_E$.
Que peut-on dire de $\dim(E)$?

Exercice 09 Dans chaque cas, calculer le déterminant de l'endomorphisme u de $\mathbb{R}_n[X]$:

1. $u(P) = P + P'$
2. $u(P) = P(X+1) - P(X)$
3. $u(P) = XP' + P(1)$

Exercice 10 E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension 3. Soit f l'endomorphisme de E dont la matrice dans une base $\mathscr{B} = (e_1, e_2, e_3)$ de E est :

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & -3 \\ -2 & 6 & 6 \\ 2 & -2 & -2 \end{pmatrix}$$

1. Pour quelles valeurs de λ a-t-on $\det(A - \lambda I_3) = 0$?

2. Déterminer une base $\mathscr{B}' = (\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3)$ de E telle que :

$$Mat_{\mathscr{B}'} f = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$