Développements Limités

Exercice 01 Donner le développement limité en 0 des fonctions suivantes à l'ordre n :

1. $\cos x e^x \qquad n=3$
2. $\dfrac{1}{1-x} - e^x \qquad n=3$
3. $(\ln(1+x))^2 \qquad n=4$
4. $e^{\sin x} \qquad n=4$
5. $\sin^6(x) \qquad n=9$
6. $\ln(\cos x) \qquad n=6$
7. $\dfrac{1}{\cos x} \qquad n=4$
8. $(1+x)^{\frac{1}{1+x}} \qquad n=3$
9. $\dfrac{1}{1+x+x^2} \qquad n=4$
10. $\tan x \qquad n=5$
11. $\dfrac{\sin x - 1}{\cos x + 1} \qquad n=2$
12. $\dfrac{\ln(1+x)}{\sin x} \qquad n=3$

Exercice 02 Calculer, à l'ordre 100, le développement limité en 0 de $\ln\left(\displaystyle\sum_{k=0}^{99} \frac{x^k}{k!}\right)$.

Exercice 03 Calculer les développements limités suivants :

1. $\frac{1}{x}$ à l'ordre 3, en 2
2. $\ln x$ à l'ordre 3 en 2
3. e^x à l'ordre 3 en 1
4. $\cos x$ à l'ordre 3 en $\frac{\pi}{3}$
5. $\sqrt{x}$ à l'ordre 3 en 1
6. $\ln(\sin x)$ à l'ordre 3 en $\frac{\pi}{3}$

Exercice 04 Calculer les développements limités en $+\infty$ suivants :

$$\frac{\sqrt{x+2}}{\sqrt{x}} \qquad n=3 \qquad\qquad \ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right) - \ln x \qquad n=4$$

Exercice 05 Calculer les limites suivantes :

1. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sin x - x}{x^3}$
2. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{1+\ln(1+x) - e^x}{1-\cos x}$
3. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{e^{x^2} - \cos x}{x^2}$
4. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\cos x - \sqrt{1-x^2}}{x^4}$
5. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x) - \sin x}{x}$
6. $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \frac{x^{x^x}\ln x}{x^x - 1}$

Exercice 06 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{1}{1+e^x}$.

1. Donner un développement limité de f en 0, à l'ordre 3.
2. En déduire que f admet un point d'inflexion en 0 (*i.e.* la courbe traverse la tangente).

Exercice 07 Étudier la position du graphe de $x \longmapsto \ln(1+x+x^2)$ par rapport à sa tangente en 0 et en 1.

Exercice 08 Prouver qu'au voisinage de $+\infty$, les courbes représentatives des fonctions suivantes admettent une asymptote dont on donnera l'équation. On précisera aussi la position de la courbe par rapport à son asymptote.

$$f(x) = x^2 \ln\left(\frac{x+1}{x}\right) \qquad g(x) = \frac{x+1}{1+e^{\frac{1}{x}}} \qquad h(x) = x\exp\left(\frac{2x}{x^2-1}\right)$$

Exercice 09 Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par :

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{e^{(n+1)x}-1}{e^x-1} & si \quad x \neq 0 \\ n+1 & sinon \end{cases}$$

1. Calculer le développement limité de f en 0 à l'ordre 3.
2. En écrivant $f(x)$ comme une somme, calculer la valeur de :

$$\sum_{k=1}^{n} k^3$$

Exercice 10 Trouver $a, b \in \mathbb{R}$ tels que :

$$\cos x - \frac{1+ax^2}{1+bx^2} = o(x^n)$$

avec n maximal.

Exercice 11 Donner un équivalent simple en 0 des fonctions suivantes :

$$f(x) = 2e^x - \sqrt{1+4x} - \sqrt{1+6x^2} \qquad g(x) = (\cos x)^{\sin x} - (\cos x)^{\tan x}$$

Exercice 12
1. Calculer :

$$l = \lim_{x \to +\infty} \left(\frac{\ln(x+1)}{\ln x}\right)^x$$

2. Donner un équivalent en $+\infty$ de :

$$\left(\frac{\ln(x+1)}{\ln x}\right)^x - l$$

Exercice 13 Soit f la fonction définie par :

$$f(x) = \frac{x^4}{1+x^8}$$

Déterminer $f^{(n)}(0)$.

Exercice 14 On considère, pour tout entier n, l'équation $x + \ln x = n$.

1. Démontrer que cette équation admet une unique solution $x_n > 0$.
2. Démontrer que $x_n \leq \ln n$ pour n assez grand, et en déduire que (x_n) tend vers $+\infty$.
3. Démontrer que $x_n \sim n$ quand $n \to +\infty$.
4. Démontrer que $x_n = n - \ln n + o(\ln n)$. (Poser $a_n = \frac{x_n}{n} - 1$)
5. Démontrer de même que $x_n = n - \ln n + \frac{\ln n}{n} + o(\frac{\ln n}{n})$.