Ensembles et Applications

Exercice 01 Soient A, B, C trois ensembles tels que $A \cup B = B \cap C$. Montrer que $A \subset B \subset C$.

Exercice 02 Soient A, B, C trois ensembles tels que $C \subset A \cup B$. A-t-on $C \subset A$ ou $C \subset B$?

Exercice 03 Soient A, B, C trois parties d'un ensemble E. Pour $X \subset E$, on note X^c son complémentaire dans E. Démontrer les égalités suivantes :

a. $(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$

b. $(A^c)^c = A$

c. $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$

d. $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$

Exercice 04 A, B, C et D désignent trois ensembles. Montrer les implications suivantes :

a. $\left\{\begin{array}{lcl} B \setminus C & \subset & A \\ C \setminus D & \subset & A \end{array}\right. \implies B \setminus D \subset A$

b. $\left\{\begin{array}{lcl} A \cap B & = & A \cap C \\ B \setminus A & = & C \setminus A \end{array}\right. \implies B = C$

c. $\left\{\begin{array}{lcl} A \cap B & = & A \cap C \\ A \cup B & = & A \cup C \end{array}\right. \iff B = C$

Exercice 05 Soient $f : E \longrightarrow F$ et $g : F \longrightarrow G$ deux applications. Démontrer les implications suivantes :

a. f et g injectives $\implies$ $g \circ f$ injective

b. f et g surjectives $\implies$ $g \circ f$ surjective

c. $g \circ f$ injective $\implies$ f injective

d. $g \circ f$ surjective $\implies$ g est surjective

e. f et g bijectives $\implies$ $g \circ f$ bijective   Réciproque ?

Exercice 06 Les applications suivantes sont-elles injectives, surjectives, bijectives ?
Dans le cas d'application bijective, donner sa bijection réciproque.

a. $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}, \ n \mapsto n+1$

b. $f : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}, \ n \mapsto n+1$

c. $f : \mathbb{N}^2 \longrightarrow \mathbb{N}, \ (n \ ; \ m) \mapsto n+2m$

d. $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}^2, \ n \mapsto (n \ ; \ n+2)$

e. $f : \mathbb{N}^2 \longrightarrow \mathbb{N}, \ \left(n \ ; \ p\right) \mapsto 2^n(2p+1)$

f. $f : \mathbb{R} \setminus \{1\} \longrightarrow \mathbb{R}, \ x \mapsto \frac{x+1}{x-1}$

g. $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2, \ \left(x \ ; \ y\right) \mapsto \left(x+y \ ; \ x-y\right)$

h. $f : \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^* \longrightarrow \mathbb{Q}, \ \left(p \ ; \ q\right) \mapsto p + \frac{1}{q}$

Exercice 07 Déterminer :

a. Une bijection de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}^*$.

b. Une bijection de $\left\{\frac{1}{n},\ n \geq 1\right\}$ dans $\left\{\frac{1}{n},\ n \geq 2\right\}$.

c. Une bijection de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{Z}$.

Exercice 08 Soit $f : [1\,;+\infty[\longrightarrow [0\,;+\infty[$ telle que $f(x) = x^2 - 1$. f est-elle bijective ?

Exercice 09 Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \dfrac{2x}{1+x^2}$.

1. f est-elle injective ? surjective ?
2. Démontrer que $f(\mathbb{R}) = [-1\,;1]$.
3. Montrer que la restriction $g : [-1\,;1] \longrightarrow [-1\,;1], \quad x \mapsto \frac{2x}{1+x^2}$ est une bijection.

Exercice 10 Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x^2 + 2x + 3$.

1. f est-elle injective ? surjective ?
2. Déterminer $J = f(\mathbb{R})$.
3. Déterminer le plus petit intervalle I contenant 0 tel que la restriction de f à I soit une bijection de I dans J.