Équations Différentielles

Exercice 01 Résoudre les équations différentielles suivantes :

1. $y'+2y=1$
2. $y'+y=\sin x$
3. $y'-y=e^x$
4. $y'+y=x-e^x$
5. $y''+2y'+y=x+1$
6. $y''-y=\cos x$
7. $y''-2y'+2y=\sin x$
8. $y''-2y'+y=e^x$
9. $y''+y'+y=e^{2x}$

Exercice 02 Résoudre les équations différentielles suivantes :

$$(E_1):\begin{cases} y'-y=e^x \\ y(0)=1 \end{cases} \qquad (E_2):\begin{cases} y''-4y'+4y=2e^x+e^{2x} \\ y(0)=1 \\ y'(0)=1 \end{cases} \qquad (E_3):\begin{cases} y''-2y'+2y=1 \\ y(0)=1 \\ y\left(\frac{\pi}{2}\right)=0 \end{cases}$$

Exercice 03 Déterminer les fonctions f dérivables sur $\mathbb{R}$ vérifiant :

1. $\forall x\in\mathbb{R},\quad f'(x)+f(x)=f(0)$
2. $\forall x\in\mathbb{R},\quad f'(x)+f(x)=\int_0^1 f(t)dt$

Exercice 04 À l'aide d'un changement de variable, résoudre les équations différentielles suivantes :

1. $(1+e^x)y''+2e^xy'+(2e^x+1)y=e^x$ *Poser* $z(x)=(1+e^x)y(x)$
2. $xy''+2(x+1)y'+(x+2)y=x$ *Poser* $z(x)=xy(x)$
3. $x^2y''-3xy'+4y=0$ *Poser* $z(t)=y(e^t)$
4. $(1+x)^2y''+(1+x)y'=2$ *Poser* $z=y'$
5. $x^2+y^2-2xyy'=0$ *Poser* $z=y^2$

Exercice 05 Soit (E) l'équation $y^{(3)}=y$.

1. Soit f une solution de (E). On pose $g=f+f'+f''$.

   Déterminer une équation différentielle du premier ordre (E') vérifiée par g.
2. Résoudre (E').
3. Résoudre (E).

Exercice 06 Le but de cet exercice est de déterminer l'ensemble des fonctions f de $\mathscr{C}(\mathbb{R})$ vérifiant l'équation :

$$\forall x\in\mathbb{R},\quad f'(x)+f(-x)=e^x \quad (E)$$

1. Justifier que si f est solution de (E), alors f est de classe C^2.
2. Dériver l'équation précédente, et déterminer une équation (E') vérifiée par f.
3. Répondre au problème.

Exercice 07 Résoudre les équations différentielles suivantes :

1. $y' + y = \frac{1}{1+e^x}$
2. $y' - \frac{y}{x} = x^2$
3. $y' \cos x + y \sin x = 1$
4. $y' - y \tan x = \cos x$
5. $(x+1)y' + xy = x^2 + 1$
6. $(1+x)y' + y = 1 + \ln(1+x)$
7. $y' - 2xy = -(2x-1)e^x$

Exercice 08 Déterminer une équation différentielle dont les solutions sont les fonctions de la forme :

$$x \longmapsto \frac{C+x}{1+x^2} \qquad C \in \mathbb{R}$$

Exercice 09 On considère l'équation différentielle $(E) : |x|y' - y = x^2$.

1. Résoudre cette équation sur les intervalles $\mathbb{R}_+^*$ et $\mathbb{R}_-^*$.
2. Résoudre cette équation sur $\mathbb{R}$.

Exercice 10 Pour les équations différentielles suivantes, trouver les solutions définies sur $\mathbb{R}$ tout entier :

1. $x^2 y' - y = 0$
2. $xy' + y - 1 = 0$
3. $xy' + 2y = \frac{x}{1+x^2}$

Exercice 11 Résoudre les équations différentielles suivantes :

1. $y' + \tan x . y = \sin 2x, \quad y(0) = 1 \quad$ sur $\left]-\frac{\pi}{2} ; \frac{\pi}{2}\right[$
2. $(x+1)y' + xy = x^2 - x + 1, \quad y(1) = 1 \quad$ sur $]-1 ; +\infty[$

Exercice 12 Trouver les courbes d'équation $y = f(x)$, avec f de classe C^1 sur $]0 ; +\infty[$, vérifiant la propriété géométrique suivante : si M est un point de la courbe, T l'intersection de la tangente en M avec l'axe (Ox), et P le projeté orthogonal de M sur (Ox), alors O est le milieu de $[PT]$.

Exercice 13 On considère l'équation différentielle $y' = a(x)y + b(x)$ où a et b sont deux fonctions réelles, définies et continues sur $\mathbb{R}$. Soit $x_0 \in \mathbb{R}$. Montrer que les tangentes au point d'abscisse x_0 aux courbes intégrales sont soit parallèles, soit concourantes.