Espaces Affines

Exercice 01 Soient $M_i(x_i;y_i)$ trois points du plan. Montrer que ces points sont alignés si et seulement si :

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

.

Exercice 02 Dans $\mathscr{E}_3$, on considère le point $A(1;-1;1)$ et la droite $D : \left\{\begin{array}{rcl} x-3y+2z & = & 1 \\ 2x+y-3z & = & -1 \end{array}\right.$.
Déterminer l'équation cartésienne du plan $\mathscr{P}$ passant par A et D.

Exercice 03 Dans $\mathscr{E}_3$, on considère les droites $D : \left\{\begin{array}{rcl} x-2z & = & 1 \\ y-z & = & 2 \end{array}\right.$ et $D' : \left\{\begin{array}{rcl} x+y+z & = & 1 \\ x-2y+2z & = & a \end{array}\right.$

1. Pour quelle(s) valeur(s) de a les droites D et D' sont-elles coplanaires ?
2. Déterminer alors une équation cartésienne du plan P contenant les droites D et D'.

Exercice 04 Dans $\mathscr{E}_3$, on considère le point $A(2;0;0)$ et les droites D_1 et D_2 définies par :

$$D_1 : \left\{\begin{array}{rcl} x & = & 2t+1 \\ y & = & 3t-2 \\ z & = & t \end{array}\right. \qquad D_2 : \left\{\begin{array}{rcl} x+y+z & = & -1 \\ x-2y+3z & = & 2 \end{array}\right.$$

ainsi que la droite D_3 passant par $B(1;2;-5)$ et dirigée par $\overrightarrow{u}(1;1;-1)$.

1. Déterminer une équation du plan P passant par A et tel que $D_1//P$ et $D_2//P$.
2. Déterminer l'intersection de P avec chacune des droites D_1, D_2 et D_3.

Exercice 05 Soient A un point du plan, $\overrightarrow{u}$ un vecteur non nul et k un réel non nul.
On cherche l'ensemble Γ des points M du plan tels que $\det(\overrightarrow{u},\overrightarrow{AM}) = k$.

1. Déterminer une solution avec $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{AM}$ orthogonaux.
2. En déduire l'ensemble Γ.

Exercice 06 Dans le plan muni d'un repère orthonormé, on considère les points $A(1;0)$, $B(0;1)$ et $C(0;2)$. Pour $m \in \mathbb{R}$, on considère les droites $D_m : y = mx$ et $D'_m : y = -mx$, ainsi que, lorsque c'est possible, les points $M_m = D_m \cap (AB)$ et $M'_m = D'_m \cap (AC)$.

1. Pour quelles valeurs de m la droite $(M_mM'_m)$ existe-t-elle ?
2. Montrer que les droites $(M_mM'_m)$ sont concourantes en un point dont on donnera les coordonnées.

$\boxed{\textbf{Exercice 07}}$ Soit ABC un triangle équilatéral de côté a. Soit Γ l'ensemble des points M du plan tels que :

$$\|\overrightarrow{MA} - 2\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\| = \|\overrightarrow{MA} - 4\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\|$$

1. Montrer que $B \in \Gamma$.
2. Montrer que le vecteur $\overrightarrow{MA} - 2\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}$ est indépendant du point M.
3. Soit G le barycentre de $(A,1)$, $(B,-4)$ et $(C,1)$. Déterminer, en fonction de G, la nature de l'ensemble Γ.

$\boxed{\textbf{Exercice 08}}$ Soient A, B et C trois points du plan. Déterminer l'ensemble :

$$\Gamma = \left\{M \ / \ \|2\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC}\| = \|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\|\right\}$$

$\boxed{\textbf{Exercice 09}}$ Soient A, B et C trois points non alignés du plan, et soit I le milieu de $[BC]$.
Déterminer, en fonction du réel k, l'ensemble :

$$\mathscr{I}_k = \left\{M \ / \ 2MA^2 + MB^2 + MC^2 = k\right\}$$

$\boxed{\textbf{Exercice 10}}$ Dans le plan affine euclidien muni d'un repère orthonormé, on considère les droites :

$$D_1 : 3x - 4y + 4 = 0 \qquad\qquad D_2 : 12x + 5y - 5 = 0$$

Déterminer les bissectrices des droites D_1 et D_2.

$\boxed{\textbf{Exercice 11}}$ Caractériser les applications affines f définies dans un repère $(O; \overrightarrow{i}; \overrightarrow{j}; \overrightarrow{k})$ par :

a. $\begin{cases} x' &= 2x+2 \\ y' &= 2y-2 \\ z' &= 2z+4 \end{cases}$

b. $\begin{cases} x' &= 5x+2y-2z+2 \\ y' &= -4x-y+2z-2 \\ z' &= 8x+4y-3z+4 \end{cases}$

c. $\begin{cases} x' &= -x-2y+2z-6 \\ y' &= -x+z-3 \\ z' &= -2x-2y+3z-6 \end{cases}$

d. $\begin{cases} x' &= 3x+4y+2z-4 \\ y' &= -2x-3y-2z+4 \\ z' &= 4x+8y+5z-8 \end{cases}$

$\boxed{\textbf{Exercice 12}}$ Déterminer la projection orthogonale de la droite $D : \begin{cases} x+y+z &= 1 \\ x-y-2z &= 0 \end{cases}$ sur le plan P d'équation $x + 2y + 3z = 0$.