Espaces Vectoriels

Exercice 01 Les ensembles suivants sont-ils des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$? Si oui, déterminer une base.

- $E_1 = \{(x;y;z) \in \mathbb{R}^3 \ / \ 3x - 7y = z\}$
- $E_2 = \{(x;y;z) \in \mathbb{R}^3 \ / \ x + y + 3z = 2\}$
- $E_3 = \{(x;y;z) \in \mathbb{R}^3 \ / \ x^2 - z^2 = 0\}$
- $E_4 = \{(x;y;z) \in \mathbb{R}^3 \ / \ x + y - z = x + y + z = 0\}$
- $E_5 = \{(x;y;z) \in \mathbb{R}^3 \ / \ z(x^2 + y^2) = 0\}$
- $E_6 = \{(x;y;z) \in \mathbb{R}^3 \ / \ x + y + a = 0 \ et \ x + 3az = 0\}$

Exercice 02 Montrer que $E = \{(x_1;x_2;x_3;x_4) \in \mathbb{R}^4 \ / \ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$. Déterminer une base de E.

Exercice 03 Les ensembles suivants sont-ils des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^n$?

- $E_1 = \{(x_1;\dots;x_n) \in \mathbb{R}^n \ / \ x_1 = 0\}$
- $E_2 = \{(x_1;\dots;x_n) \in \mathbb{R}^n \ / \ x_1 = 1\}$
- $E_3 = \{(x_1;\dots;x_n) \in \mathbb{R}^n \ / \ x_1 = x_2\}$
- $E_1 = \{(x_1;\dots;x_n) \in \mathbb{R}^n \ / \ x_1x_2 = 0\}$

Exercice 04 Les ensembles suivants sont-ils des espaces vectoriels ?

- $E_1 = \{f \in \mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{R}) \ / \ f(1) = 0\}$
- $E_2 = \{f \in \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R}) \ / \ af'' + bf' + cf = 0\}$
- $E_3 = \{f \in \mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{R}) \ / \ \text{f croissante}\}$
- $E_4 = \{(u_n) \in \mathbb{R}^\mathbb{N} \ / \ (u_n) \text{ converge vers } 0\}$
- $E_5 = \{A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) \ / \ A \text{ soit inversible}\}$
- $E_6 = \{A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) \ / \ tr(A) = 0\}$

Exercice 05 Soit E un $\mathbb{R}$-ev. Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de E.

1. Démontrer que $F \cap G$ est un sous-espace vectoriel de E.
2. Démontrer que $F \cup G$ est un sous-espace vectoriel de E si et seulement si $F \subset G$ ou $G \subset F$.
   Donner un exemple d'ensembles F et G tels que $F \cup G$ ne soit pas un sous-espace vectoriel de E.

Exercice 06 Montrer que $u = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$, $v = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $w = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix}$ forment une famille liée de vecteurs de $\mathbb{R}^3$.

Exercice 07 Déterminer une équation du plan vectoriel engendré par $u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ et $u_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Exercice 08 Montrer que les familles suivantes sont des familles libres de $\mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$:

1. $(x \mapsto x, x \mapsto x^2, x \mapsto x^3)$
2. $(x \mapsto \cos x, x \mapsto \sin x)$
3. $(x \mapsto e^{\alpha x})_{\alpha \in \mathbb{R}}$

Exercice 09 Soit $E = \mathbb{R}^\mathbb{N}$. On considère les suites $u = (\cos(n\theta))_{n\in\mathbb{N}}$, $v = (\cos(n\theta + a))_{n\in\mathbb{N}}$ et $w = (\cos(n\theta + b))_{n\in\mathbb{N}}$, où θ, a et b sont trois réels donnés. Montrer que (u, v, w) est une famille liée de E.
☞ *Penser à utiliser* $\sin(n\theta)$...

Exercice 10 Soit $E = \{(u_n) \in \mathbb{R}^\mathbb{N} \ / \ (u_n) \text{ converge}\}$. Montrer que l'ensemble des suites constantes et l'ensemble des suites convergeant vers 0 sont deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de E.

Exercice 11 Soit $E = \mathscr{D}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, dérivables sur $\mathbb{R}$. On pose

$$F = \{f \in E \ / \ f(0) = f'(0) = 0\}$$

Démontrer que F est un sous-espace vectoriel de E, puis déterminer un supplémentaire de F dans E.

Exercice 12 On considère les ensembles :

$$V = \left\{(x;y;z;t) \in \mathbb{R}^4 \ / \ x - 2y = 0 \text{ et } y - 2z = 0\right\} \qquad W = \left\{(x;y;z;t) \in \mathbb{R}^4 \ / \ x + z = y + t\right\}$$

1. Montrer que V et W sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^4$.
2. Donner une base de V, une base de W et une base de $V \cap W$.
3. Montrer que $E = V + W$.

Exercice 13 Soient E et F deux espaces vectoriels. Soit $f \in \mathscr{L}(E,F)$. Démontrer que :

1. $Ker(f)$ est un *s.e.v* de E.
2. $Im(f)$ est un *s.e.v* de F.
3. $Ker(f) = \{0_E\} \iff f$ est injective.

Exercice 14 Soient u et v deux endomorphismes d'un espace vectoriel E. Démontrer que :

1. $u \circ v = v \circ u \implies Ker(u)$ et $Im(u)$ sont stables par v.
2. $u \circ v = 0 \iff Im(v) \subset Ker(u)$

Exercice 15 Les applications suivantes sont-elles linéaires ?

- $f_1 : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3, (x;y) \mapsto (x+y, x-2y, 0)$
- $f_2 : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3, (x;y) \mapsto (x+y, x-2y, 1)$
- $f_3 : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}, (x;y) \mapsto x^2 - y^2$
- $f_4 : \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}^2, F \mapsto (F(0), F'(1))$

Exercice 16 Soit $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ l'application définie par :

$$f(x;y) = (x+y; x-y; x+y)$$

1. Démontrer que f est un endomorphisme.
2. Déterminer le noyau et l'image de f. Conclusion ?

Exercice 17 Soit $E = \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$. Soit φ l'application définie sur E par :

$$\varphi(f) = f'$$

Démontrer que φ est un endomorphisme de E. Déterminer le noyau et l'image de φ. Conclusion ?