Espaces Euclidiens

Exercice 01 $E = \mathbb{R}_n[X]$. Dans chaque cas, démontrer que $\varphi : E \times E \longrightarrow \mathbb{R}$ est un produit scalaire :

1. $\varphi(P,Q) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} P(k)Q(k)$
2. $\varphi(P,Q) = \displaystyle\int_0^1 P(t)Q(t)dt$

Exercice 02 Pour $A, B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, on définit :

$$\langle A, B\rangle = tr({}^tAB)$$

1. Démontrer que $\langle ., .\rangle$ définit un produit scalaire sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.
2. Si A et B désignent deux matrices symétriques, montrer que :

$$(tr(AB + BA))^2 \leq 4tr(A^2)tr(B^2)$$

Exercice 03 Soit E un espace euclidien muni du produit scalaire $\langle ., .\rangle$. Soient $a \in E$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.
Résoudre l'équation d'inconnue $x \in E$:

$$\langle a, x\rangle = \lambda$$

Exercice 04 E désigne un espace euclidien muni d'un produit scalaire $\langle ., .\rangle$, a est un vecteur unitaire de E et k un nombre réel. Soit $\phi : E \times E \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par :

$$\phi(x, y) = \langle x, y\rangle + k\langle x, a\rangle\langle y, a\rangle$$

Donner une condition nécessaire et suffisante sur k pour que ϕ soit un produit scalaire.

Exercice 05 On considère l'application $\varphi : \mathbb{R}_n[X] \times \mathbb{R}_n[X] \longrightarrow \mathbb{C}$ définie par :

$$\varphi(P,Q) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} P(e^{i\theta})Q(e^{-i\theta})d\theta$$

1. Montrer que φ définit un produit scalaire sur $\mathbb{R}_n[X]$.
2. Montrer que $(1, X, X^2, \dots, X^n)$ est une base orthogonale pour ce produit scalaire.

Exercice 06 Soit E un espace euclidien muni d'un produit scalaire $\langle ., .\rangle$, et soit $f : E \longrightarrow E$ telle que :

$$\forall x, y \in E,\ \langle f(x), y\rangle = \langle x, f(y)\rangle$$

1. Montrer que f est linéaire.
2. Montrer que la matrice de f dans une base orthonormée $\mathscr{B} = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ est symétrique.
3. Montrer que $\ker(f)$ et $\mathrm{Im}\,(f)$ sont supplémentaires et orthogonaux.

Exercice 07 Soit E un espace euclidien muni d'un produit scalaire $\langle .,. \rangle$.
Soit $v \in E$, et soit $\lambda \in \mathbb{R}^*$. Soit $f : E \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par :

$$f(x) = x + \lambda \langle x, v \rangle v$$

Donner une condition nécessaire et suffisante sur λ et v pour que f soit une isométrie vectorielle.
Préciser alors la nature de f.

Exercice 08 Soit E un espace euclidien muni d'un produit scalaire $\langle .,. \rangle$. Soit $f \in \mathscr{L}(E)$. Démontrer que :

$$\forall x, y \in E, \langle f(x), f(y) \rangle = \langle x, y \rangle \iff \forall x \in E, \|f(x)\| = \|x\|$$

Exercice 09 Soit E un espace euclidien, muni d'un produit scalaire $\langle .,. \rangle$ et de la norme $\|.\|$ associée.

1. Pour tout $x \in E \setminus \{0\}$, on pose $f(x) = \dfrac{x}{\|x\|^2}$. Montrer que :

$$\forall x, y \in E \setminus \{0\}, \ \|f(x) - f(y)\| = \frac{\|x - y\|}{\|x\|\|y\|}$$

2. En déduire l'inégalité de Ptolémée :

$$\forall a, b, c, d \in E, \ \|a - c\|\|b - d\| \leq \|a - b\|\|c - d\| + \|b - c\|\|a - d\|$$

☞ *Se ramener à $a = 0$, puis utiliser la fonction f.*

Exercice 10 Soit E un espace euclidien, muni d'un produit scalaire $\langle .,. \rangle$ et de la norme $\|.\|$ associée. Soit $\lambda > 0$.
Un endomorphisme f de E est une similitude de rapport λ si pour tout $x \in E$, $\|f(x)\| = \lambda \|x\|$.

1. Démontrer que f est une similitude de rapport λ si et seulement si, pour tous $x, y \in E$, $\langle f(x), f(y) \rangle = \lambda^2 \langle x, y \rangle$.

2. Le but de cette question est de montrer que f est une similitude si et seulement si f est non nulle et conserve l'orthogonalité (*i.e.* pour tout couple (x, y) de E^2, si $x \perp y$, alors $f(x) \perp f(y)$).

   (a) Démontrer le sens direct.

   (b) Soit $f \in \mathscr{L}(E)$ non nulle et conservant l'orthogonalité. Soit $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$ une base orthonormée de E.
   Démontrer que pour tous i, j, on a $\|f(e_i)\| = \|f(e_j)\|$.
   ☞ *On pourra démontrer que $u + v \perp u - v \implies \|u\| = \|v\|$*

   (c) En déduire la réciproque.