Isométries

Exercice 01 Déterminer la nature et préciser les éléments caractéristiques de l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans une b.o.n.d. est donnée par :

(a) $\dfrac{1}{4}\begin{pmatrix} 3 & 1 & \sqrt{6} \\ 1 & 3 & -\sqrt{6} \\ -\sqrt{6} & \sqrt{6} & 2 \end{pmatrix}$ (b) $\dfrac{1}{9}\begin{pmatrix} -8 & 4 & 1 \\ 4 & 7 & 4 \\ 1 & 4 & -8 \end{pmatrix}$ (c) $-\dfrac{1}{9}\begin{pmatrix} 7 & 4 & 4 \\ -4 & 8 & -1 \\ 4 & 1 & -8 \end{pmatrix}$

Exercice 02 Soit E un espace vectoriel euclidien orienté muni d'une base orthonormée directe $\mathscr{B} = (i, j, k)$. Soit $f \in \mathscr{L}(E)$ dont la matrice dans la base $\mathscr{B}$ est :

$$\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{2} & 1 \\ \sqrt{2} & 0 & -\sqrt{2} \\ 1 & \sqrt{2} & 1 \end{pmatrix}$$

1. Former une base orthonormée directe $\mathscr{B}' = (u, v, w)$ telle que $v, w \in P : x + z = 0$.
2. Former la matrice de f dans $\mathscr{B}'$. Reconnaître f.

Exercice 03 E désigne un espace vectoriel euclidien orienté de dimension 3.

1. Montrer que deux rotations de même axe ou deux retournements d'axes orthogonaux commutent.
2. On considère maintenant deux rotations f et g de E telles que $f \circ g = g \circ f$.
   (a) Soit u un vecteur unitaire appartenant à l'axe de rotation de f. Montrer que $g(u)$ appartient à l'axe de rotation de f et en déduire que $g(u) = \pm u$.
   (b) Que peut-on dire de f et g si $g(u) = u$?
   (c) Que peut-on dire de f et g si $g(u) = -u$?

Exercice 04 Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. On pose :

$$A = \begin{pmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{pmatrix}$$

1. Pour quelles valeurs de a et b la matrice A est-elle orthogonale ?
2. Préciser alors pour chaque cas la nature et les éléments caractéristiques de l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à A.

Exercice 05 Soit $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\}$. On pose :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -c & b \\ c & 0 & -a \\ -b & a & 0 \end{pmatrix}$$

1. Montrer que $I_3 + A$ est inversible.

2. On pose $\Omega = (I_3 - A)(I_3 + A)^{-1}$. Démontrer que $\Omega \in SO_3(\mathbb{R}) \setminus \{I_3\}$.

Exercice 06 E désigne un espace vectoriel euclidien orienté de dimension 3.
Déterminer la matrice de la réflexion s de plan $P : x + 2y - z = 0$. Que peut-on dire de cette matrice ?
Trouver une b.o.n.d. dans laquelle la matrice de s est simple.

Exercice 07 E désigne un espace vectoriel euclidien orienté de dimension 3.
Soit $u \in E$ normé. Soit $\theta \in \mathbb{R}$. Soit f la rotation d'angle θ, d'axe dirigé et orienté par u. Démontrer que :

$$\forall x \in E,\ f(x) = (1 - \cos\theta)\langle u, x\rangle u + \cos\theta\, x + \sin\theta\, u \wedge x$$

Application : Déterminer la matrice relativement à une b.o.n.d (i, j, k) de E de la rotation d'angle $\frac{\pi}{2}$ d'axe dirigé et orienté par $u = i + j - k$.