Limites de fonctions - Continuité

Exercice 01 Déterminer les limites suivantes :

a. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x\sin x}{1-\cos x}$

b. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sin(3\pi x)}{\sin(4\pi x)}$

c. $\lim\limits_{x\to 0} xe^{\frac{1}{x}}$

d. $\lim\limits_{x\to 0} x^x$

e. $\lim\limits_{x\to \pi} \dfrac{\sin^2 x}{1+\cos x}$

f. $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{\sin(ax)-\sin\left(x^2\right)}{a-x}$

g. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x-1}{x^n-1}$

h. $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{4}} \dfrac{\sin x-\cos x}{x-\frac{\pi}{4}}$

i. $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{E(x)}{x}$

j. $\lim\limits_{x\to +\infty} x.E(\dfrac{1}{x})$

k. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^2+2E(x)}{x}$

l. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1+x^2}}{x}$

Exercice 02 Déterminer, si elles existent, les limites suivantes :

a. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x}{2+\sin\frac{1}{x}}$

b. $\lim\limits_{x\to +\infty} (\ln(1+e^{-x}))^{\frac{1}{x}}$

c. $\lim\limits_{x\to 0^+} x^{\frac{1}{\ln(e^x-1)}}$

d. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{\sqrt{1-\cos x}}$

e. $\lim\limits_{x\to +\infty} \sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}-\sqrt{x}$

f. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\tan x-\sin x}{\sin x(\cos 2x-\cos x)}$

g. $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{x^4}{1+x^\alpha \sin x}$, $\alpha\in\mathbb{R}$

h. $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{x^x-1}{\ln(x+1)}$

i. $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{(x+1)^x}{x^{x+1}}$

Exercice 03 Étudier la limite suivante, pour $(a\ ;\ b)\in\mathbb{R}_+^{*\,2}$:

$$\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{a^x+b^x}{2}\right)^{\frac{1}{x}}$$

Exercice 04 Montrer que la fonction $x\mapsto \sin\frac{1}{x}$ n'est pas prolongeable par continuité en 0.

Exercice 05 Les fonctions suivantes sont-elles prolongeables par continuité sur $\mathbb{R}$?

a. $f : x\mapsto x\sin\frac{1}{x}$

b. $g : x\mapsto \frac{1}{x}\ln\left(\frac{e^x+e^{-x}}{2}\right)$

c. $h : x\mapsto \frac{1}{1-x}-\frac{2}{1-x^2}$

d. $i : x\mapsto \sin x.\sin\frac{1}{x}$

e. $j : x\mapsto \cos x.\cos\frac{1}{x}$

f. $k : x\mapsto E(x)+\sqrt{x-E(x)}$

Exercice 06

1. (a) Démontrer que $E(x)\underset{+\infty}{\sim} x$.

   (b) A-t-on $e^{E(x)}\underset{+\infty}{\sim} e^x$? Justifier.

2. (a) Démontrer que $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{E(x)}-\sqrt{x}=0$.

   (b) En déduire que $e^{\sqrt{E(x)}}\underset{+\infty}{\sim} e^{\sqrt{x}}$.

   (c) Plus généralement, montrer que pour tout $\alpha\in\,]0;1[$:

$$e^{E(x)^\alpha}\underset{+\infty}{\sim} e^{x^\alpha}$$

Exercice 07 Que peut-on dire d'une fonction f périodique et qui admet une limite finie en $+\infty$?

Exercice 08 Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ continue et telle que pour tout réel x, $f(x)^2 = 1$. Démontrer que $f = 1$ ou $f = -1$.

Exercice 09 Que dire d'une fonction $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$, où I est un intervalle, continue, et ne prenant qu'un nombre fini de valeurs ?

Exercice 10 Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ continue en $x_0 \in \mathbb{R}$. Démontrer que $|f|$ est continue en x_0. Réciproque ?

Exercice 11 Soient a et b deux réels tels que $a < b$. Soit $f : [a;b] \longrightarrow [a;b]$ continue.
Démontrer que f admet un point fixe (i.e $\exists\, c \in [a;b] \ / \ f(c) = c$).

Exercice 12 Pour tout entier naturel n, on considère l'application f_n définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f_n(x) = x^n + x - 1$$

1. Montrer que pour tout n, l'équation $f_n(x) = 0$ admet une unique solution x_n appartenant à l'intervalle $[0;1]$.
2. Pour $x \in]0;1[$, montrer que $f_{n+1}(x) \leq f_n(x)$.
3. En déduire que la suite (x_n) est monotone et convergente. Quelle est sa limite ?

Exercice 13 Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x) = \dfrac{x}{1+|x|}$.
Montrer que f réalise une bijection de $\mathbb{R}$ dans $[-1;1]$ et donner une expression de f^{-1}.

Exercice 14 Démontrer que les fonctions suivantes sont bijectives, et déterminer une expression de $f^{-1}(x)$, en précisant les ensembles de départ et d'arrivée :

1. $f(x) = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$
2. $g(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$