Matrices

Exercice 01 Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}$ où $(a; b) \in \mathbb{R}^2$. Déterminer les matrices $B \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ qui commutent avec A.

Exercice 02 Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Existe-t-il une matrice $B \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ telle que $A = B^2$?

Exercice 03 Calculer la puissance n-ième des matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix} \qquad D = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

Exercice 04 On considère la matrice A suivante :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

On pose $B = A - I_3$.
Calculer B^n pour $n \in \mathbb{N}$ et en déduire A^n pour $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 05 Soit $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.
Calculer $A^2 + A$ et en déduire que A est inversible, puis calculer A^{-1}.

Exercice 06 Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$.
Calculer $A^3 - A$ et en déduire que A est inversible, puis calculer A^{-1}.

Exercice 07 Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 5 & -3 & 3 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$.
Calculer $(A + I_3)^3$ et en déduire que A est inversible, puis calculer A^{-1}.

Exercice 08 Calculer (s'il existe) l'inverse des matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ -2 & -2 & -1 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & \alpha & \alpha^2 \\ \overline{\alpha} & 1 & \alpha \\ \overline{\alpha}^2 & \overline{\alpha} & 1 \end{pmatrix} \quad (\alpha \in \mathbb{C})$$

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad E = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & \cdots & 1 \\ 0 & 1 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \cdots & 0 & 1 & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Exercice 09 Soit $n \in \mathbb{N} \setminus \{0;1\}$ et $\omega = \exp(\frac{2i\pi}{n})$. Soit $A = (\omega^{(k-1)(l-1)})_{1 \leq k,l \leq n}$.
Calculer $A\overline{A}$. En déduire que A est inversible et calculer A^{-1}.

Exercice 10 Soient A, B, C trois matrices de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ $(n \geq 2)$ non nulles telles que :

$$ABC = O_n$$

Démontrer qu'au moins deux des matrices A, B, C ne sont pas inversibles.

Exercice 11 Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ nilpotente $(i.e. \exists p \in \mathbb{N}^* \ / \ A^p = O_n)$.
Démontrer que $I_n - A$ est inversible et calculer son inverse.

Exercice 12 Soient $A, B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ deux matrices vérifiant :

$$AB - BA = A$$

Calculer $tr(A^p)$ pour $p \in \mathbb{N}$.