Matrices et Applications Linéaires

Exercice 01 Déterminer la matrice relative aux bases canoniques des applications linéaires f suivantes :

a. $f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x,y,z) & \longmapsto & (x+y, y-2x+z) \end{array} \right.$

c. $f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_3[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}_3[X] \\ P & \longmapsto & P(X+1) \end{array} \right.$

b. $f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z) & \longmapsto & (y+z, z+x, x+y) \end{array} \right.$

d. $f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_3[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}^4 \\ P & \longmapsto & (P(1), P(2), P(3), P(4)) \end{array} \right.$

Exercice 02 Soit $a \in \mathbb{C}^*$. Soit $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ définie par $f(z) = z + a\overline{z}$.
Déterminer la matrice de l'endomorphisme f de $\mathbb{C}$ dans la base $(1, i)$.

Exercice 03 Un endomorphisme f a pour matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & 2 & -3 \end{pmatrix}$. Calculer A^2 et en déduire la nature de f. Trouver une base dans laquelle la matrice de f soit simple.

Exercice 04 Un endomorphisme f a pour matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$. Calculer A^2 et en déduire la nature de f. Trouver une base dans laquelle la matrice de f soit simple.

Exercice 05 Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension 3. Soit f un endomorphisme de E tel que $f^2 \neq 0$ et $f^3 = 0$.
Montrer qu'il existe une base de E dans laquelle la matrice de f est $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Exercice 06 Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est $\begin{pmatrix} 3 & 1 & -3 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.
On pose $\epsilon_1 = (1,1,1)$, $\epsilon_2 = (1,-1,0)$ et $\epsilon_3 = (1,0,1)$.

1. Montrer que $(\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
2. Quelle est la matrice de f dans cette base ? En déduire une base de $\operatorname{Ker} f$ et de $\operatorname{Im} f$.

Exercice 07 On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et l'application $f : \mathscr{M}_2(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ définie par $f(M) = AM$.
Montrer que f est linéaire, et donner sa matrice associée dans la base canonique de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.

Exercice 08 Soient $A \in \mathscr{M}_{3,2}(\mathbb{R})$ et $B \in \mathscr{M}_{2,3}(\mathbb{R})$ telles que :

$$AB = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Montrer que $BA = I_2$.
☞ *Considérer les morphismes f et g associés à A et B et trouver une base de $\mathbb{R}^2$ "facile" en fonction de g.*

Exercice 09 Soit f l'application linéaire de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^2$ dont la matrice dans les bases canoniques est :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & -3 \end{pmatrix}$$

On appelle (e_1, e_2, e_3) la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et (f_1, f_2) celle de $\mathbb{R}^2$. On pose :

$$e'_1 = e_2 + e_3 \ , \ e'_2 = e_1 + e_3 \ , \ e'_3 = e_1 + e_2 \ , \ f'_1 = \frac{1}{2}(f_1 + f_2) \ , \ f'_2 = \frac{1}{2}(f_1 - f_2)$$

a. Montrer que (e'_1, e'_2, e'_3) est une base de $\mathbb{R}^3$ et (f'_1, f'_2) est une base de $\mathbb{R}^2$.

b. Quelle est la matrice de f dans ces nouvelles bases ?

Exercice 10 Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$ défini par $f(P) = (X+1)P'$.

a. Déterminer la matrice A de f dans la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$.

b. Justifier que $(1, X+1, (X+1)^2)$ est une base de $\mathbb{R}_2[X]$ et déterminer la matrice B de f dans cette base.

c. Déterminer une base de l'image et du noyau de f.

Exercice 11 On considère l'endomorphisme φ de $\mathbb{R}_n[X]$ défini par $\varphi(P)(X) = P(X+1)$.

a. Écrire la matrice A de φ dans la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$.

b. Justifier que φ est un isomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$ et que A est inversible. Calculer A^{-1}.

Exercice 12 On considère, dans $\mathbb{R}^3$, le plan P d'équation $x - y - z = 0$ et la droite D d'équation $x = -y = z$.
Trouver la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ de la projection p sur P parallèlement à D.