Nombres Complexes

Exercice 01 Déterminer la forme algébrique des nombres complexes suivants :

$$z_1 = (1+i)^{25} \qquad z_2 = \left(\frac{1+i\sqrt{3}}{1-i}\right)^{20} \qquad z_3 = \frac{(1+i)^{2000}}{(i-\sqrt{3})^{1000}}$$

Exercice 02 Déterminer le module et un argument de $z = 1+\cos a + i\sin a$ pour $a \in \mathbb{R}$.
En déduire la forme algébrique de $(1+\cos a + i\sin a)^n$ en fonction de a et n.

Exercice 03 Soient $a, b \in \left]0;\frac{\pi}{2}\right[$. Donner la forme trigonométrique des nombres complexes suivants :

$$z_1 = 1-e^{ia} \qquad z_2 = e^{ia}+e^{ib} \qquad z_3 = \frac{1+e^{ia}}{1+e^{ib}}$$

Exercice 04 Soit $z \in \mathbb{C} \setminus \{\}-1$. Démontrer que :

$$|z| = 1 \iff \exists a \in \mathbb{R} \;/\; z = \frac{1+ia}{1-ia}$$

Exercice 05 Soit $z \in \mathbb{C} \setminus \{\}1$. Démontrer que :

$$|z| = 1 \iff \frac{1+z}{1-z} \in i\mathbb{R}$$

Exercice 06 Soient $(a_1, a_2, ..., a_n, b_1, b_2, ..., b_n) \in \mathbb{Z}^{2n}$. Démontrer qu'il existe deux entiers relatifs A et B tels que :

$$A^2 + B^2 = \prod_{k=1}^{n} (a_k^2 + b_k^2)$$

Exercice 07 Soit $(u;v) \in \mathbb{C}^2$. Démontrer que :

$$|u+iv|^2 = u^2+v^2 \iff \left\{\begin{array}{ccc} u+iv & = & 0 \\ ou & & \\ (u;v) & \in & \mathbb{R}^2 \end{array}\right.$$

Exercice 08 Exprimer $\cos(4x)$ et $\sin(4x)$ comme polynômes en $\cos x$ et $\sin x$.

Exercice 09 Linéariser $\cos^4 x$ et $\sin^4 x$. (les exprimer en fonction de $\cos(kx)$ et $\sin(kx)$, avec $k \in \{1,2,3,4\}$)

Exercice 10 *Calcul de* $\sin\left(\frac{\pi}{5}\right)$

1. Linéariser $\sin^5 x$, et exprimer $\sin(3x)$ en fonction de $\sin x$.
2. En déduire une équation vérifiée par $\sin\left(\frac{\pi}{5}\right)$.
3. En déduire la valeur exacte de $\sin\left(\frac{\pi}{5}\right)$.

Exercice 11 Démontrer que pour tout entier naturel n, $(1+i)^n + (1-i)^n = 2\left(\sqrt{2}\right)^n \cos\left(\frac{n\pi}{4}\right)$.

Exercice 12 Déterminer les racines carrées des nombres complexes suivants :

$$z_1 = i \qquad z_2 = 3+4i \qquad z_3 = 8-6i$$

Exercice 13 Déterminer les racines carrées de $\sqrt{3}+i$. En déduire les valeurs de $\cos\frac{\pi}{12}$ et $\sin\frac{\pi}{12}$.

Exercice 14 Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :

a) $z^2-(2+i)z-1+7i=0$

b) $z^2+iz-1+1=0$

c) $(1+i)z^2+(11+5i)z+24+2i=0$

d) $z^3-(2+i)z^2+2(1+i)z-2i=0$

e) $(3z^2+z+1)^2+(z^2+2z+2)^2=0$

f) $2(z^2+z+1)^2=i(z+1)^2$

g) $z^3-(1-2\sin\theta)z^2+(1-2\sin\theta)z-1=0$

h) $z^4-5z^3+6z^2-5z+1=0$

☞ *Pour les équations du 3ème degré, chercher des racines "évidentes".*

☞ *Pour h), poser $Z=z+\frac{1}{z}$*

Exercice 15 Résoudre $4iz^3+2(1+3i)z^2-(5+4i)z+3(1-7i)=0$, sachant qu'il existe une racine réelle.

Exercice 16 Résoudre l'équation $e^z=3\sqrt{3}-3i$ d'inconnue $z\in\mathbb{C}$.

Exercice 17 Soient $n\in\mathbb{N}^*$ et $x\in\mathbb{R}$. Calculer les sommes suivantes :

1. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\cos kx$ et $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\sin kx$
2. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\cos kx$ et $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\sin kx$
3. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\frac{\cos kx}{\cos^k x}$ et $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\frac{\sin kx}{\sin^k x}$
4. $D_n=\displaystyle\sum_{k=-n}^{n}e^{ikx}$ puis $K_n=\displaystyle\sum_{k=0}^{n}D_k$ avec $x\notin 2\pi\mathbb{Z}$

Exercice 18 Soit $n\in\mathbb{N}^*$. On pose :

$$A=\sum_{0\leqslant 3k\leqslant n}\binom{n}{3k}\qquad B=\sum_{0\leqslant 3k+1\leqslant n}\binom{n}{3k+1}\qquad C=\sum_{0\leqslant 3k+2\leqslant n}\binom{n}{3k+2}$$

1. Exprimer de la façon la plus simple possible les sommes suivantes :
   (a) $A+B+C$
   (b) $A+jB+j^2C$
   (c) $A+j^2B+jC$
2. Résoudre le système ainsi obtenu et en déduire les valeurs de A, B et C en fonction de n.

Exercice 19 Résoudre les équations suivantes :

$$z^3=2-2i\qquad z^5=-i\qquad z^6=\frac{-4}{1+i\sqrt{3}}$$

Exercice 20 Résoudre les équations suivantes :

$$(z-1)^5=(z+1)^5\qquad \left(\frac{z+1}{z-1}\right)^3+\left(\frac{z-1}{z+1}\right)^3=0\qquad (z+i)^n=(z-i)^n$$

Exercice 21 Démontrer que les solutions de l'équation $1+z+z^2+\ldots+z^{n-1}-nz^n=0$ sont toutes de module inférieur ou égal à 1.

Exercice 22 Soit ω une racine n-ième de l'unité. Calculer $S(\omega)=\displaystyle\sum_{k=0}^{n}(k+1)\omega^k$.

Exercice 23 Soit $n\in\mathbb{N}^*$. On note U_n l'ensemble des racines n-ièmes de l'unité. Calculer $\displaystyle\sum_{z\in U_n}|z-1|$.

Exercice 24 Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $\omega_n = e^{\frac{2i\pi}{n}}$

1. Calculer le produit des racines n-ièmes de l'unité.
2. Pour tout entier p, calculer $\sum_{k=0}^{n-1} \omega^{kp}$.
3. En déduire que $\sum_{k=0}^{n-1} (1+\omega^k)^n = 2n$.

Exercice 25 Démontrer que $|z-i| = |z+i|$ si et seulement si z est un nombre réel.

Exercice 26 Déterminer l'ensemble des points M d'affixe z tels que :

1. $\dfrac{|z-3|}{|z-5|} = 1$
2. $\dfrac{|z-3|}{|z-5|} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$
3. $|(1+i)z - 2i| = \dfrac{1}{2}$

Exercice 27 Le plan est rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$. Déterminer l'ensemble des points M d'affixe z vérifiant :

1. $\arg(z-2) \equiv \frac{\pi}{2}\ [2\pi]$
2. $\arg(iz) \equiv \frac{\pi}{4}\ [\pi]$
3. $\arg(\frac{z}{1+i}) \equiv \frac{\pi}{2}\ [\pi]$

Exercice 28 Déterminer l'ensemble des points M d'affixe z tels que les points $A(1)$, $M(z)$ et $N(1+z^2)$ soient alignés.

Exercice 29 Déterminer les nombres complexes z tels que les points d'affixes z, z^2 et z^4 soient alignés.

Exercice 30 Soient a, b et c trois nombres complexes distincts deux à deux, et ABC est le triangle formé par les points $A(a)$, $B(b)$ et $C(c)$. Démontrer que :

$$ABC \text{ est équilatéral} \iff a^2+b^2+c^2 = ab+ac+bc$$

Exercice 31 On considère l'application f suivante :

$$f: \begin{array}{ccc} \mathbb{C}\setminus\{1\} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ z & \longmapsto & \dfrac{z+1}{\overline{z}-1} \end{array}$$

1. Pour $z \neq 1$, donner la forme exponentielle de $f(z)$.
2. Déterminer les antécédents de 1 et -1 par f. f est-elle injective? surjective? bijective?
3. Préciser $f^{-1}(\mathbb{R})$.

Exercice 32 Soit f l'application suivante :

$$f: \begin{array}{ccc} \mathbb{C}^* & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ z & \longmapsto & z+\dfrac{1}{z} \end{array}$$

1. f est-elle injective? surjective? bijective?
2. Pour $n \in \mathbb{N}$, calculer $\left(z+\dfrac{1}{z}\right)\left(z^n+\dfrac{1}{z^n}\right)$.
   En déduire que pour tout entier naturel n, il existe un polynôme P_n tel que : $\forall z \in \mathbb{C}^*, f(z^n) = P_n(f(z))$.
3. Quelles sont les racines de P_n?