Nombres Réels

Exercice 01 Réduire au même dénominateur l'expression suivante :

$$\frac{1}{x^2-1}-\frac{1}{x(x+1)}-\frac{1}{x(x+1)(x+2)}$$

Exercice 02 Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes :

$$\frac{1}{x-2}\leq\frac{1}{2x} \qquad \frac{2x+1}{1+x}<\frac{3x+2}{1-x} \qquad x+1>\sqrt{x^2+2x}$$

Exercice 03 Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes, en fonction du paramètre m :

1. $(m+1)x+2-m=0$
2. $x^2+mx-6m^2=0$
3. $(m-1)x^2+(2m+3)x+m+2=0$

Exercice 04 Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

1. $\sqrt{x^2-3}=5x-9$
2. $\sqrt{x+4}+\sqrt{x+2}=1$
3. $\sqrt{x+4}-\sqrt{x+2}=1$

Exercice 05 Démontrer que pour tout entier naturel n non nul, on a :

$$\frac{2n+2}{2n+3}\leq\frac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{n+2}}$$

Exercice 06 Soit $u_n=\frac{(n!)^2}{(2n)!}4^n$ pour tout entier naturel n.
Démontrer que (u_n) est croissante et en déduire l'inégalité suivante, pour tout entier naturel n :

$$\frac{1}{(n!)^2}\leq\frac{4^n}{(2n)!}$$

Exercice 07 Démontrer les propriétés suivantes :

1. $\forall(x,y)\in\mathbb{R}^2,\ |x+y|\leq|x|+|y|$
2. $\forall(x,y)\in\mathbb{R}^2,\ |x-y|\leq|x|+|y|$
3. $\forall(x,y)\in\mathbb{R}^2,\ \big||x|-|y|\big|\leq|x-y|$

Exercice 08 Dans cet exercice, la fonction E désigne la fonction partie entière.

1. Montrer que : $\forall x\in\mathbb{R},\ E(x+1)=E(x)+1$
2. Montrer que : $\forall(x,y)\in\mathbb{R}^2,\ E(x)+E(y)\leq E(x+y)$

Exercice 09

1. Démontrer que pour tous entiers non nuls n et m, on a :

$$0<\frac{mn}{(m+n)^2}\leq\frac{1}{4}$$

2. En déduire que l'ensemble :

$$A=\left\{\frac{mn}{(m+n)^2}, n\in\mathbb{N}^*, m\in\mathbb{N}^*\right\}$$

admet une borne inférieure et une borne supérieure que l'on déterminera.