Polynômes

Exercice 01 Calculer le quotient et le reste de la division euclidienne de :

a) $X^4+5X^3+12X^2+19X-7$ par X^2+3X-1

b) $X^4-4X^3-9X^2+27X+38$ par X^2-X-7

c) X^5-X^2+2 par X^2+1

Exercice 02 Soient $a, b \in \mathbb{C}$ et $P \in \mathbb{C}[X]$. Déterminer le reste de la division euclidienne de P par $(X-a)(X-b)$.

Exercice 03 Déterminer le reste de la division euclidienne de $(X+1)^n - X^n - 1$ par X^2+X+1.

Exercice 04 Déterminer les polynômes P de $\mathbb{C}[X]$ vérifiant :

a) $P(X+1) = P(X)$

b) $P(P(X)) = P(X)$

c) $(X+1)P(X) = (X-2)P(X+1)$

d) $P(X^2) = (X^2+1)P(X)$

Exercice 05 P, Q et R sont trois polynômes de $\mathbb{C}[X]$ tels que : $P^2 - XQ^2 = XR^2$.
Montrer que P, Q et R sont des polynômes nuls.

Exercice 06 Déterminer les polynômes de $\mathbb{C}[X]$ vérifiant $P(0) = 0$ et $P(X^2+1) = (P(X))^2+1$.

Exercice 07 Décomposer dans $\mathbb{C}[X]$ et dans $\mathbb{R}[X]$ les polynômes suivants :

a) $P(X) = X^3-1$

b) $P(X) = X^4+1$

c) $P(X) = X^8+X^4+1$

Exercice 08 Soit $P(X) = X^4-6X^3+9X^2+9$.

1. Décomposer $X^4-6X^3+9X^2$ dans $\mathbb{R}[X]$.
2. En déduire une décomposition de P dans $\mathbb{C}[X]$ puis dans $\mathbb{R}[X]$.

Exercice 09 Décomposer dans $\mathbb{C}[X]$ puis dans $\mathbb{R}[X]$ le polynôme $X^9+X^6+X^3+1$.

Exercice 10 Résoudre dans $\mathbb{R}^3$ l'équation :

$$\begin{cases} x+y+z &= 2 \\ xyz &= -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z} &= \frac{1}{2} \end{cases}$$

Exercice 11 Soit $n \geqslant 2$. Déterminer l'ordre de multiplicité de 2 comme racine du polynôme :

$$P_n(X) = nX^{n+2} - (4n+1)X^{n+1} + 4(n+1)X^n - 4X^{n-1}$$

Exercice 12 Montrer que le polynôme :

$$P_n(X) = \sum_{k=0}^{n} \frac{X^k}{k!}$$

n'a que des racines simples dans $\mathbb{C}[X]$.

Exercice 13 Montrer que le polynôme $X^n - X + 1$ n'a que des racines simples dans $\mathbb{C}[X]$.

Exercice 14 Soit $(P_k)_{k\in[\![0;n]\!]}$ une famille de polynômes de $\mathbb{R}_n[X]$ tels que pour tout k, $\deg P_k = k$.
Montrer que $(P_k)_{k\in[\![0;n]\!]}$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

Exercice 15 On considère l'application $\varphi : \mathbb{R}_n[X] \longrightarrow \mathbb{R}[X]$ définie par $\varphi(P) = XP'' - P'$.

a) Démontrer que φ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.

b) Déterminer $\operatorname{Ker}\varphi$ et en donner une base. En déduire $\operatorname{rg}\varphi$.

c) Déterminer $\operatorname{Im}\varphi$ et en donner une base. Retrouver $\operatorname{rg}\varphi$.

Exercice 16 On considère l'application $\varphi : \mathbb{R}[X] \longrightarrow \mathbb{R}[X]$ définie par $(\varphi(P))(X) = P(X+1) - P(X)$.
Démontrer que φ est linéaire. Calculer son noyau et son image.

Exercice 17 Soit $n \in \mathbb{N}$ et soit $\varphi : \mathbb{R}_n[X] \longrightarrow \mathbb{R}[X]$ définie par $(\varphi(P))(X) = (X^2 - 1)P'(X) - nXP(X)$.

a) Démontrer que φ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.

b) Déterminer $\operatorname{Ker}\varphi$ en fonction de la parité de n et en donner une base. En déduire $\operatorname{rg}\varphi$.