Probabilités

Exercice 01 Déterminer une probabilité sur $\Omega = \{1, 2, ..., n\}$ telle que la probabilité de l'évènement $\{1, 2, ..., k\}$ soit proportionnelle à k^2.

Exercice 02 Soient $(\Omega, \mathscr{A}, p)$ un espace probabilisé et $A_1, \ldots, A_n$ des évènements. Démontrer que :

$$p(A_1 \cap \ldots \cap A_n) \geqslant \sum_{i=1}^{n} p(A_i) - (n-1)$$

Exercice 03 On dispose de $2n$ cartons numérotées de 1 à $2n$. On les tire un par un au hasard. Quelle est la probabilité que les numéros impairs soient tous avant les numéros pairs ?

Exercice 04 On dispose d'un dé pipé tel que la probabilité d'obtenir une face soit proportionnelle au chiffre porté par cette face. On lance le dé pipé. Quelle est la probabilité d'obtenir un nombre premier ?

Exercice 05 Le prof de Mathématiques qui vous donne cette colle veut parier 20 € avec vous que dans votre classe de 30 élèves, au moins deux personnes ont la même date d'anniversaire. Pariez-vous 20 € ?

Exercice 06 On considère N coffres. Avec une probabilité p, un trésor a été placé dans l'un de ces coffres, chaque coffre pouvant être choisi de façon équiprobable. On a ouvert $N-1$ coffres sans trouver le trésor. Quelle est la probabilité que le dernier coffre renferme le trésor ?

Exercice 07 Combien de fois faut-il lancer un dé équilibré pour avoir au moins 1 chance sur 2 d'obtenir un six ?
Même question avec deux dés pour obtenir un double six.

Exercice 08 Dans une loterie, il y a 30 billets dont n sont gagnants. On suppose que tous les billets ont la même probabilité d'être achetés. On achète 2 billets au hasard. Déterminer la probabilité de ne rien gagner et en déduire la valeur de n à partir de laquelle on a 90% de chance de gagner.

Exercice 09 Jean a deux enfants, dont un garçon. Quelle est la probabilité que ses deux enfants soient des garçons ?

Exercice 10 Une information est transmise à l'intérieur d'une population. Avec une probabilité p, c'est l'information correcte qui est transmise à chaque étape d'une personne à une autre. Avec une probabilité $1-p$, c'est l'information contraire qui est transmise. On note p_n la probabilité que l'information après p transmissions soit correcte.

1. Établir une relation de récurrence entre p_{n+1} et p_n.
2. En déduire l'expression de p_n en fonction de n.
3. Calculer $\lim\limits_{n \to +\infty} p_n$ et interpréter le résultat.

Exercice 11 Dans une usine, 1% des articles produits sont défectueux. Un contrôle qualité permet de refuser 95% des articles défectueux mais aussi de refuser 2% des articles acceptables.

1. Quelle est la probabilité qu'il y ait une erreur de contrôle ?
2. Quelle est la probabilité qu'un article accepté soit en réalité défectueux ?

Exercice 12 Dans une population, une personne sur 10 000 souffre d'une pathologie. Un laboratoire pharmaceutique met sur le marché un test sanguin. Celui-ci est positif chez 99% des malades mais aussi faussement positif chez 0,1% des personnes non atteintes. Un individu passe ce test et obtient un résultat positif.
Quelle est sa probabilité d'être malade ? Qu'en conclure ?

Exercice 13 On dispose de 100 dés, parmi lesquels 25 sont pipés et tels que la probabilité d'obtenir 6 est égale à $\frac{1}{2}$.

1. On choisit un dé au hasard, on le lance, et on obtient le nombre 6. Quelle est la probabilité que ce dé soit pipé ?
2. On choisit un dé au hasard, on le lance n fois, et on obtient n fois le nombre 6.
   Quelle est la probabilité p_n que ce dé soit pipé ?
3. Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} p_n$ et interpréter le résultat.

Exercice 14 L'humeur d'un prof de Mathématiques lunatique suit l'étrange règle suivante :

- S'il est sympathique le jour j, il sera grincheux le jour $j+1$ avec une probabilité de $\frac{1}{3}$.
- S'il est grincheux le jour j, il le restera le jour $j+1$ avec une probabilité de $\frac{1}{2}$.

On note S_n l'évènement "Le prof est sympathique le n-ième jour" et G_n l'évènement "Le prof est grincheux le n-ième jour". De plus, on note s_n et g_n les probabilités respectives de S_n et G_n.

1. Exprimer s_{n+1} et g_{n+1} en fonction de s_n et g_n.
2. Déterminer l'expression de s_n en fonction de n, puis celle de g_n en fonction de n.
3. Lundi matin, le prof a l'air énervé. Quelle est la probabilité qu'il soit de bonne humeur vendredi ?
4. Sachant qu'il était de bonne humeur le jour de la rentrée, quelle est la probabilité qu'il le soit encore au conseil de classe du premier semestre ?

Exercice 15 Soit $N \in \mathbb{N}^*$. Soit $p \in [0;1]$.
Une particule se déplace sur le segment $[\![0;N]\!]$ par saut d'une unité, vers la gauche ou la droite. À chaque saut, la probabilité qu'elle se déplace vers la droite est p, et la probabilité qu'elle se déplace vers la gauche est $q = 1-p$.
Tous les sauts sont supposés indépendants.
Initialement, la particule est en $n \in [\![0;N]\!]$. Si la particule atteint une des extrémités de cet intervalle, elle s'arrête.
On note q_n la probabilité qu'elle s'arrête en 0 en partant initialement de n.

1. Justifier que $q_0 = 1$ et $q_N = 0$.
2. Démontrer que pour tout entier $n \in [\![1;N-1]\!]$:
$$q_n = pq_{n+1} + qq_{n-1}$$
3. En déduire une expression de q_n en fonction de n, p, q et N.
4. Calculer de même p_n, la probabilité qu'elle s'arrête en N en partant de n.
5. Quelle est la probabilité que la particule ne s'arrête jamais ?