Théorème de Rolle - Accroissements Finis

Théorème de Rolle

Exercice 01 Soit $f : [0;2] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction deux fois dérivable telle que $f(0) = f(1) = f(2) = 0$.
Démontrer qu'il existe $c \in]0;2[$ tel que $f''(c) = 0$.

Exercice 02 Soit $f : [a;b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction n fois dérivable.

1. On suppose que f s'annule $n+1$ fois sur $[a;b]$. Démontrer qu'il existe $c \in [a;b]$ tel que $f^{(n)}(c) = 0$.
2. On suppose que $f(a) = f'(a) = \ldots = f^{(n-1)}(a) = f(b) = 0$. Démontrer qu'il existe $c \in [a;b]$ tel que $f^{(n)}(c) = 0$.

Exercice 03 Soit $f(x) = (x-a_1)(x-a_2)\ldots(x-a_n)$ une fonction polynôme de degré n ayant n racines distinctes $a_1 < a_2 < \ldots < a_n$. Démontrer que f' admet $n-1$ racines distinctes.

Exercice 04 Soit P une fonction polynôme. Démontrer que l'équation $P(x) = e^x$ admet un nombre fini de solutions.

Exercice 05 Soient a et b deux nombres réels, et f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^n + ax + b$.
Démontrer, en utilisant le théorème de Rolle, que l'équation $f(x) = 0$ admet au plus trois solutions réelles.

Exercice 06 Soit $a \in \mathbb{R}$. Soit $f : [a;+\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ une application continue sur $[a;+\infty[$, dérivable sur $]a;+\infty[$, telle que $f(a) = 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$. Montrer qu'il existe $c \in]a;+\infty[$ tel que $f'(c) = 0$.

Exercice 07 Soient f et g deux fonctions définies et continues sur $[a;b]$, dérivables sur $]a;b[$.

1. Démontrer qu'il existe $c \in]a;b[$ tel que :
$$f'(c)(g(b)-g(a)) = g'(c)(f(b)-f(a))$$
2. En déduire l'implication suivante :
$$\lim_{x\to a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = l \implies \lim_{x\to a^+} \frac{f(x)-f(a)}{g(x)-g(a)} = l$$
3. Application : calculer $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\cos x - e^x}{(x+1)e^x - 1}$.

Théorème des Accroissements Finis

Exercice 08 Soit f une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$, telle que $f(0) = 0$ et $\forall x \geqslant 0, f(x) \geqslant x$.

1. Démontrer que $f'(0) \geqslant 1$.
2. Démontrer que $\forall x > 0$, il existe $c \in]0;x[$ tel que $f'(c) \geqslant 1$.

Exercice 09 Soit f une fonction de classe C^1 sur $[0;1]$. On suppose que $f(0) = 0$ et que $\forall x \in [0;1], f'(x) > 0$.
Démontrer que :
$$\exists\, m > 0 \;/\; \forall x \in [0;1], f(x) \geqslant mx$$

Exercice 10 Démontrer, à l'aide du théorème des accroissements finis, l'inégalité suivante :

$$\forall t > 0, \quad \frac{t}{1+t^2} < \arctan t < t$$

Exercice 11 À l'aide du théorème des accroissements finis, déterminer la limite suivante :

$$\lim_{x\to+\infty} (x+1)e^{\frac{1}{x+1}} - xe^{\frac{1}{x}}$$

Exercice 12 À l'aide du théorème des accroissements finis, démontrer qu'au voisinage de $+\infty$, on a :

$$\sqrt[n+1]{n+1} - \sqrt[n]{n} \sim -\frac{\ln n}{n^2}$$

Exercice 13

1. Démontrer que pour tout réel $x > 0$, on a :

$$\frac{1}{1+x} < \ln(1+x) - \ln x < \frac{1}{x}$$

2. En déduire que la suite (u_n) définie par $u_n = \dfrac{1}{n+1} + \dfrac{1}{n+2} + \ldots + \dfrac{1}{2n}$ converge vers $\ln 2$.

Exercice 14 Soient $0 < \alpha < 1$ et $k \in \mathbb{N}^*$. Démontrer que :

$$\frac{\alpha}{(k+1)^{1-\alpha}} \leqslant (k+1)^\alpha - k^\alpha \leqslant \frac{\alpha}{k^{1-\alpha}}$$

En déduire qu'au voisinage de $+\infty$:

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^{1-\alpha}} \sim \frac{n^\alpha}{\alpha}$$

Exercice 15 Soit (u_n) la suite définie pour tout entier naturel n par :

$$u_n = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \ldots + \frac{1}{n!}$$

En considérant, pour tout entier n, la fonction f_n définie sur $[0;1]$ par $f_n(x) = e^{-x}\left(1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!}\right)$, démontrer que (u_n) converge vers e.

Exercice 16 On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $f(x) = 4 - \frac{1}{4}\ln x$.

1. Montrer que f admet un unique point fixe α, et que $\alpha \in I =]3;4[$.
2. Montrer que I est stable par f et que pour tout $x \in I$, $\left|f'(x)\right| \leqslant \frac{1}{12}$.
3. Soit (x_n) la suite définie par $x_0 \in I$ et pour tout entier n, $x_{n+1} = f(x_n)$.

   Démontrer que (x_n) converge vers α, et donner une approximation de α à 10^{-5} près.

Exercice 17 Soit (u_n) la suite définie par $u_0 \neq 0$ et $u_{n+1} = 2 + \frac{1}{u_n^2}$.

1. Démontrer que pour tout entier n, $2 < u_n < \frac{9}{4}$.
2. Démontrer que (u_{2n}) et (u_{2n+1}) sont adjacentes. Que peut-on en déduire pour (u_n) ?
3. Déterminer une valeur approchée de la limite de (u_n).