# Séries

**Exercice 01** Étudier la convergence des séries suivantes :

a) $\displaystyle\sum_{n\geq 0} \frac{n}{n^2+1}$ c) $\displaystyle\sum_{n\geq 0} \frac{\sqrt{n}}{n^2+\sqrt{n}}$ e) $\displaystyle\sum_{n\geq 0} \frac{\sin^2 n}{n^2+1}$ g) $\displaystyle\sum_{n\geq 1} n\sin\left(\frac{1}{n}\right)$ i) $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{\ln n}{n^2}$

b) $\displaystyle\sum_{n\geq 0} \frac{n}{n^3+1}$ d) $\displaystyle\sum_{n\geq 0} \frac{ch(n)}{ch(2n)}$ f) $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{\ln(n^n)}{n!}$ h) $\displaystyle\sum_{n\geq 1} e^{-\sqrt{\ln n}}$ j) $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \ln(1-\frac{1}{n+1})$

**Exercice 02** Déterminer la nature de la série $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \left(\frac{1}{n}\right)^{1+\frac{1}{n}}$.

**Exercice 03** Déterminer, en fonction du paramètre $\alpha \in \mathbb{R}$, la nature des séries suivantes :

a) $\displaystyle\sum_{n\geq 1} e^{-n^\alpha}$ b) $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{\ln n}{n^\alpha}$ c) $\displaystyle\sum_{n\geq 2} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n^\alpha+(-1)^n}}$

**Exercice 04** Soit $(u_n)$ une suite de réels strictements positifs. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $v_n = \frac{u_n}{1+u_n}$.
Montrer que $\sum u_n$ et $\sum v_n$ ont la même nature.

**Exercice 05** Soit $(u_n)$ une suite de réels positifs. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $v_n = \frac{1}{1+n^2u_n}$.
Montrer que si $\sum v_n$ converge, alors $\sum u_n$ diverge.
☞ *On pourra étudier la série* $\sum \sqrt{u_n v_n}$

**Exercice 06** Justifier la convergence des séries suivantes puis calculer leur somme :

a) $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n(n+1)(n+2)}$ c) $\displaystyle\sum_{n\geq 0} \frac{n+1}{n!}$ e) $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{x^n}{(1-x^n)(1-x^{n+1})}$ $|x| \leq 1$

b) $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n(2n+1)}$ d) $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{n^2-1}{n!}$ f) $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n(n+1)\dots(n+m)}$

**Exercice 07** Pour $p \in \mathbb{N}$, on pose $a_p = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n^p}{2^n}$.

1. Justifier que $a_p$ existe et exprimer $a_p$ en fonction de $a_0, a_1, \dots, a_{p-1}$.
2. En déduire que $a_p \in \mathbb{N}$.

**Exercice 08** Soit $x \in \mathbb{R}$. Étudier la nature de la série $\displaystyle\sum_{n\geq 0} nx^{n-1}$, et calculer la somme en cas de convergence.

**Application :** Un homme ivre rentre chez lui avec 10 clés différentes dans sa poche. Pour ouvrir la porte, il essaie une clé au hasard et, si la porte ne s'ouvre pas, il remet la clé dans sa poche et recommence. Au bout de combien d'essais peut-il espérer ouvrir la porte ?

**Exercice 09** À l'aide d'une comparaison série-intégrale, établir un équivalent simple de :

a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \sqrt{k}$ b) $\displaystyle\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k\ln k}$ c) $\ln n!$

**Exercice 10** À l'aide d'une comparaison série-intégrale, calculer $\displaystyle\lim_{a\to+\infty} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a}{n^2+a}$.

**Exercice 11** On considère la série harmonique $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n}$.

1. Démontrer que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \sim \ln n$.
2. On pose, pour tout entier $n \geq 1$, $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln n$.
   (a) Montrer que la série de terme général $u_n - u_{n-1}$ est convergente.
   (b) En déduire l'existence d'un réel $\gamma$ tel que :
$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \ln n + \gamma + o(1)$$

**Exercice 12** On considère la série $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$.

1. Montrer que les suites $S_{2n} = \displaystyle\sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^{k-1}}{k}$ et $S_{2n+1} = \displaystyle\sum_{k=1}^{2n+1} \frac{(-1)^{k-1}}{k}$ sont adjacentes.
2. En déduire que la série est convergente.
3. En remarquant que $\displaystyle\int_0^1 t^n dt = \frac{1}{n+1}$, calculer $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$.

**Exercice 13** On s'intéresse à la série des inverses des nombres premiers $\displaystyle\sum_{k\geq 1} \frac{1}{p_k}$. On pose $u_n = \displaystyle\prod_{k=1}^{n} \frac{1}{1-\frac{1}{p_k}}$.

1. Montrer que $(u_n)$ converge $\iff$ $(\ln u_n)$ converge.
2. En déduire que $(u_n)$ converge $\iff$ $\displaystyle\sum_{k\geq 1} \frac{1}{p_k}$ est convergente.
3. Démontrer que :
$$u_n = \prod_{k=1}^{n} \sum_{i\geq 0} \frac{1}{p_k^j}$$
4. Montrer que $u_n \geq \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{j}$. En déduire la nature de $\displaystyle\sum_{k\geq 1} \frac{1}{p_k}$.
5. Pour $\alpha \in \mathbb{R}$, quelle est la nature de $\displaystyle\sum_{k\geq 1} \frac{1}{p_k^\alpha}$ ?