Systèmes Linéaires

Exercice 01 Résoudre dans $\mathbb{R}^3$ les systèmes suivants :

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} 2x & + & 3y & - & z & = & 1 \\ 4x & + & y & + & 2z & = & 6 \\ x & - & 3y & + & z & = & 2 \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{ccccccc} 2x & + & y & + & z & = & 7 \\ x & + & 2y & + & z & = & 8 \\ x & + & y & + & 2z & = & 9 \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{ccccccc} x & + & y & + & z & = & 2 \\ 3x & - & y & & & = & 1 \\ 4x & & & + & z & = & 4 \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} x & + & y & + & z & = & 0 \\ x & - & y & & & = & 0 \\ x & + & 4y & + & z & = & 0 \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{ccccccc} x & + & y & + & 2z & = & 5 \\ x & - & y & - & z & = & 1 \\ x & & & + & z & = & 3 \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{ccccccc} 3x & - & y & + & 2z & = & a \\ -x & + & 2y & - & 3z & = & b \\ x & + & 2y & + & z & = & c \end{array}\right.$$

Exercice 02 Résoudre les systèmes suivants en fonction du paramètre m :

$$\left\{\begin{array}{ccccc} mx & + & y & = & 2 \\ (m^2+1)x & + & 2my & = & 1 \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{ccccc} (m+1)x & + & (m-1)y & = & 1 \\ (m-1)x & + & (m+1)y & = & 1 \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} 2x & + & 3y & + & z & = & 4 \\ -x & + & my & + & 2z & = & 5 \\ 7x & + & 3y & + & (m-5)z & = & 7 \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{ccccccc} 2x & + & my & + & z & = & 3m \\ x & - & (2m+1)y & + & 2z & = & 4 \\ 5x & - & y & + & 4z & = & 3m-2 \end{array}\right.$$

Exercice 03 Résoudre dans $\mathbb{R}^4$ le système suivant :

$$\left\{\begin{array}{ccccccccc} 3x & & & + & 2z & & & = & 0 \\ & & 3y & + & z & + & 3t & = & 0 \\ x & + & y & + & z & + & t & = & 0 \\ 2x & - & y & + & z & - & t & = & 0 \end{array}\right.$$

Exercice 04 Étudier les solutions du système suivant en fonction des réels a et b :

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} ax & + & by & + & z & = & 1 \\ x & + & aby & + & z & = & b \\ x & + & by & + & az & = & 1 \end{array}\right.$$

Exercice 05

1. Déterminer tous les polynômes P de degré 2 tels que $P(1) = 1$, $P'(1) = 1$ et $P(-1) = 0$.
2. Déterminer tous les polynômes P de degré 3 tels que $P(-1) = 1$, $P(1) = 0$ et $P(2) = 1$.

Exercice 06 Déterminer trois réels α, β, γ tels que pour tout polynôme P de degré ≤ 3, on ait la relation :

$$\int_2^4 P(x)dx = \alpha P(2) + \beta P(3) + \gamma P(4)$$

Exercice 07 Pour $x > 1$, on définit $f(x) = \frac{5x^2+21x+22}{(x-1)(x+3)^2}$.

1. Déterminer 3 réels a, b et c tels que :

$$\forall x > 1, \quad f(x) = \frac{a}{x-1} + \frac{b}{x+3} + \frac{c}{(x+3)^2}$$

2. En déduire une expression de la primitive de f sur $]1\,;+\infty[$ qui s'annule en 2.

Exercice 08 Résoudre le système suivant dans $\mathbb{R}^3$:

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x^3y^2z^6 & = & 1 \\ x^4y^5z^{12} & = & 2 \\ x^2y^2z^5 & = & 3 \end{array} \right.$$

Exercice 09 L'espace est rapporté à un repère orthonormé $(O; \overrightarrow{i}\,; \overrightarrow{j}\,; \overrightarrow{k})$. Déterminer l'intersection des plans $\mathscr{P}$ et $\mathscr{P}'$ d'équations :

$$\mathscr{P} : x + y + 2z = 1 \qquad\qquad \mathscr{P}' : 2x - y + z = 2$$

Exercice 10 Soit $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ définie par $f(x; y; z) = (2x + y; x + 3y - z; 2y - z)$.
Déterminer l'ensemble des points fixes de f.

Exercice 11 Soient $A\,(1\ ;\ 2)$, $B\,(3\ ;\ 4)$ et $C\,(4\ ;\ 1)$ trois points du plan.
Peut-on placer trois points M_1, M_2 et M_3 tels que A soit le milieu de $[M_1M_2]$, B soit le milieu de $[M_2M_3]$ et C soit le milieu de $[M_3M_1]$?