Variables Aléatoires

Exercice 01 Des vaches laitières sont atteintes par une maladie avec la probabilité $p = 0,15$. Pour dépister la maladie dans une étable de n vaches, on fait procéder à une analyse de lait. Deux méthodes sont possibles :

- On fait une analyse sur un échantillon de lait de chaque vache.
- On effectue d'abord une analyse sur un échantillon de lait provenant du mélange des n vaches. Si le résultat est positif, on effectue une nouvelle analyse, cette fois pour chaque vache.

On voudrait connaître la méthode la plus économique (celle qui nécessite en moyenne le moins d'analyse). Pour cela, on note X_n la variable aléatoire comptant le nombre d'analyses réalisées avec la deuxième méthode. On pose $Y_n = \frac{X_n}{n}$.

1. Déterminer la loi de Y_n, et montrer que son espérance vaut : $1 + \frac{1}{n} - (0.85)^n$.
2. Étudier la fonction $x \mapsto ax + \ln x$ avec $a = \ln(0,85)$. Donner la liste des entiers n tels que $f(n) > 0$.
3. Montrer que $f(n) > 0 \iff \mathbb{E}(Y_n) < 1$. En déduire la réponse au problème posé.

Exercice 02 Pour rejoindre un petit village, on emprunte une route en mauvais état. La probabilité de crever un pneu sur cette route, supposée indépendante du type de pneu utilisé, est notée p. Une voiture pourrait rouler avec un pneu crevé, mais pas plus. On peut rouler en moto, tant que les deux pneus sont intacts.
Discuter du mode de transport à choisir en fonction de p.

Exercice 03 Une personne possède 4 clefs d'apparences identiques, parmi lesquelles une seule ouvre une porte. Elle les essaie au hasard, en éliminant celles qui ne marchent pas. On note X le nombre d'essais avant l'ouverture de la porte.

1. Calculer la loi de probabilité de X.
2. Calculer l'espérance et la variance de X.
3. Ivre, la personne essaie les clefs en les remettant à chaque fois dans le trousseau.
   Reprendre les questions précédentes dans ce cas.

Exercice 04 Dans une urne se trouvent six boules. Trois sont numérotées 1, deux sont numérotées 2, et une est numérotée 3. On effectue des tirages successifs sans remise de toutes les boules de l'urne. Déterminer la loi et l'espérance des variables aléatoires suivantes :

1. X_1 : le nombre de boules numérotées 1 présentes dans l'urne à l'issue du troisième tirage
2. X_2 : le nombre de tirages nécessaires avant de ne plus avoir de boules numérotées 1 dans l'urne.

Exercice 05 Un sac contient 10 jetons noirs et 5 jetons rouges. On tire simultanément 3 jetons, et on note X le nombre de jetons rouges obtenus.

1. Déterminer la loi de X, ainsi que son espérance et sa variance.
2. On parie sur le nombre de jetons rouges qui sortent. Chaque jeton rouge fait gagner a € au joueur, et chaque jeton noir lui fait perdre 5 € . Quelle valeur donner à a pour que ce jeu soit équitable ?

Exercice 06 On joue au jeu suivant : on parie n euros sur un nombre compris entre 1 et 6, puis on lance trois dés et on gagne $4n$ euros si le nombre sort trois fois, $3n$ euros s'il sort deux fois, $2n$ euros s'il sort une fois.

1. Déterminer, en fonction de n, la loi et l'espérance de la variable X représentant le gain algébrique du joueur.
2. En cas de trois apparitions du chiffre prévu, combien de fois le joueur devrait-il remporter sa mise pour que le jeu soit équitable ?

Exercice 07 On lance deux dés équilibrés. On note U_1 et U_2 les variables aléatoires associées aux résultats obtenus. On pose $X = \min(U_1, U_2)$ et $Y = \max(U_1, U_2)$.

1. Déterminer la loi de probabilité de X et calculer $\mathbb{E}(X)$.
2. Exprimer $X + Y$ en fonction de U_1 et U_2, et en déduire $\mathbb{E}(Y)$.

Exercice 08 Une urne opaque contient n boules indiscernables au toucher, numérotées de 1 à n. On tire successivement et sans remise deux boules de cette urne. On note X le plus petit des nombres obtenus, et Y le plus grand.

1. Calculer, pour tout $(i, j) \in [\![1\,; n]\!]^2$, la probabilité $p(X = i, Y = j)$.
2. Déterminer les lois de probabilité de X et Y.
3. Calculer $\mathbb{E}(X)$ et $\mathbb{E}(Y)$.

Exercice 09 On lance simultanément quatre dés à six faces et on note X le plus grand chiffre obtenu. Déterminer la loi de X, son espérance et sa variance.

Exercice 10 On lance n fois une pièce parfaitement équilibrée. Quelle est la probabilité d'obtenir strictement plus de piles que de faces ?

Exercice 11 On dispose de n urnes numérotées de 1 à n. L'urne numérotée k contient k boules, numérotées de 1 à k. On choisit au hasard une urne, puis on pioche une boule dans cette urne (les boules sont indiscernables au toucher). On note Y le numéro de la boule obtenue.
Déterminer la loi de Y, puis calculer $\mathbb{E}(Y)$.

Exercice 12 Soit X une variable aléatoire suivant une loi binomiale $\mathscr{B}(n, p)$. Soit $\epsilon > 0$.

1. Démontrer que :
$$P\left(\left|\frac{X}{n} - p\right| \geqslant \varepsilon\right) \leqslant \frac{p(1-p)}{n\varepsilon^2}$$
2. On dispose d'un dé cubique bien équilibré. Déterminer un nombre minimum de lancers à effectuer pour pouvoir affirmer, avec un risque d'erreur inférieur à 5%, que la fréquence d'apparition du 6 au cours de ces lancers diffère de $1/6$ d'au plus 0,01.