Olympiades de Mathématiques

Séance n°1 : Arithmétique Élémentaire

Mise en bouche

L'**Arithmétique** est la science des opérations avec les nombres. C'est un domaine des Mathématiques fascinant.
Si les mots *diviseur*, *quotient*, *multiple*, *pgcd*, *nombre premier* ou encore *division euclidienne* vous disent quelque chose, c'est parce-que vous pratiquez l'Arithmétique depuis longtemps.

L'**arithmétique élémentaire**, vue dès l'école primaire, s'intéresse aux nombres entiers et aux opérations de base que sont l'addition, la soustraction, la multiplication et la division. Très vite, on remarque que certains entiers sont particuliers : ce sont les **nombres premiers**, nombres qui ne possèdent que deux diviseurs positifs, 1 et eux-même.

Combien sont-ils ? Une infinité, et on le sait depuis longtemps. C'est **Euclide**[1] qui va le prouver en premier, et de manière fort élémentaire.

Euclide, c'est lui

Ces nombres sont les **briques élémentaires** des nombres entiers : le **théorème fondamental de l'arithmétique** assure qu'un nombre composé (non premier) est factorisable en un produit de nombres premiers, et que cette factorisation est unique à l'ordre des facteurs près.

Les nombres premiers sont au coeur du **système de cryptage RSA**, très utilisé dans le commerce électronique, et plus généralement pour échanger des données confidentielles sur Internet.

Cependant, certaines conjectures résistent encore aux meilleurs mathématiciens actuels. D'énoncés simples et compréhensibles, elles restent néanmoins non démontrées à ce jour (Janvier 2024) :

- **Conjecture de Goldbach** : tout nombre pair strictement supérieur à 2 peut s'écrire comme somme de deux nombres premiers
- **Conjecture des nombres premiers jumeaux**[2] : il existe une infinité de jumeaux premiers

1. Mathématicien grec ($\sim$ 300 av. JC), auteur du plus célèbre ouvrage de l'histoire des mathématiques, intitulé Les Éléments : c'est la bible de la *géométrie euclidienne*.
2. Deux nombres premiers sont dits **jumeaux** s'ils ne diffèrent que de 2

Hors d'oeuvre : Multiples, Diviseurs et Division euclidienne

Débutons ce repas par une définition classique mais souvent mal connue :

Définition. Soit $(a, b) \in \mathbb{Z}^2$.
On dit que **a est un multiple de b** (ou que **b est un diviseur de a**) s'il existe un entier relatif k tel que $a = k \times b$.

Exemple.

- 16 est un multiple de 4, car $16 = 4 \times 4$
- 26 est un diviseur de 78, car $78 = 3 \times 26$
- -6 est un multiple de 3, car $-6 = -2 \times 3$

Exercice 01 Commençons par quelques questions élémentaires...

1. Lister les diviseurs de 30.
2. Quel est le nombre minimum de diviseurs d'un entier ?
3. Donner un entier naturel admettant seulement deux diviseurs positifs et dont la somme est supérieure à 100.
4. Quel est le seul nombre entier qui admet un infinité de diviseurs ?

Exercice 02 Démontrer que la somme de trois entiers consécutifs est divisible par 3.

Exercice 03 Démontrer sans calculatrice que les nombres suivants sont des multiples de 37 :

1. Les nombres formés de 3 chiffres identiques, comme 222 et 777
2. Les nombres formés de 6 chiffres identiques, comme 555 555

Vous souvenez vous des divisions que vous effectuiez à l'école primaire ?
Derrière ces opérations se cache le théorème d'arithmétique suivant :

Théorème. (Division euclidienne dans $\mathbb{Z}$)
Soient $a \in \mathbb{Z}$, $b \in \mathbb{Z}^*$. Il existe un unique couple $(q, r) \in \mathbb{Z}^2$ tel que :

$$a = bq + r \qquad\qquad 0 \leqslant r < |b|$$

En particulier, a est multiple de b si et seulement si son reste dans la division euclidienne par b est égal à 0.

Exercice 04 Un entier naturel n est tel que si on le divise par 5 le reste vaut 3 et si on le divise par 6 le reste augmente de 1 et le quotient diminue de 1. Déterminer n.

Exercice 05 Démontrer que le nombre $2 \times 3^{2019} + 1$ n'est divisible ni par 2 ni par 3.

Entrée : Entiers pairs et impairs

Une des applications de la division euclidienne est la propriété suivante :

Propriété. *Pour tout entier naturel n, il existe un unique entier naturel k tel que $n = 2k$ ou $n = 2k + 1$.*

Démonstration. *Dans la division euclidienne par 2, le reste ne peut prendre que 2 valeurs : 0 ou 1.* □

Remarque. Les mathématiciens préfèrent les symboles (appelés **quantificateurs**) aux longues phrases. La propriété précédente peut s'énoncer de la manière suivante :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \exists! k \in \mathbb{N} \ / \ n = 2k \text{ ou } n = 2k + 1$$

Les nombres de la forme $2k$ sont appelés nombres **pairs**, et ceux de la forme $2k + 1$ sont appelés nombres **impairs**. Ainsi, tout nombre pair est de la forme $2k$, et tout nombre impair est de la forme $2k + 1$.

Exercice 06 Compléter puis démontrer les propriétés suivantes :

1. La somme de deux entiers pairs est un entier . . .
2. La somme de deux entiers impairs est un entier . . .
3. Le produit de deux entiers pairs est un entier . . .
4. Le produit de deux entiers impairs est un entier . . .

Exercice 07

1. (Facile) Démontrer que pour tout entier naturel n : n pair $\Longrightarrow$ n^2 pair
2. (Facile ?) Démontrer que pour tout entier naturel n : n^2 pair $\Longrightarrow$ n pair

Exercice 08 **Irrationnalité de $\sqrt{2}$**

On suppose qu'il existe deux entiers naturels p et q, premiers entre eux[3], tels que $\frac{p}{q} = \sqrt{2}$.

1. Démontrer que p^2 est pair, puis que p est pair.
2. En déduire que q^2 est pair, puis que q est pair.
3. Déduire des deux questions précédentes une contradiction avec l'hypothèse initiale, puis conclure.

3. De sorte que la fraction $\frac{p}{q}$ est irréductible

Plat : somme et différences de deux carrés

Exercice 09

1. On suppose qu'il existe deux entiers naturels a et b tels que :

$$2018 = a^2 + b^2 \qquad \text{avec} \quad a \leqslant b$$

   (a) Justifier que $a \leqslant 31$.

   (b) Démontrer que si a et b sont pairs, alors $a^2 + b^2$ est un multiple de 4.

   (c) Démontrer que a et b ne peuvent pas être de parités différentes. Que peut-on en déduire pour a et b ?

   (d) Quels sont les chiffres des unités possibles pour le carré d'un entier naturel impair ?

   En déduire que le chiffre des unités de a ne peut-être ni 1, ni 5, ni 9.

2. Déterminer tous les couples (a, b) d'entiers naturels tels que $2018 = a^2 + b^2$.

Exercice 10

1. Écrire les nombres 1^3, 2^3, 3^3 comme différence de deux carrés.

2. Montrer que quelque soit l'entier naturel a, il existe un unique couple d'entiers naturels (m, p) tel que :

$$a = m - p \qquad a^2 = m + p$$

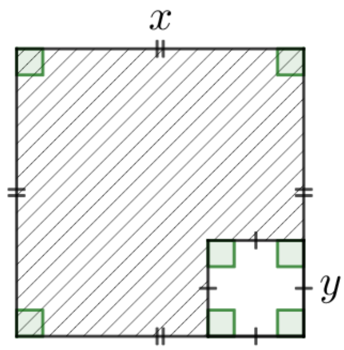
3. En déduire que pour tout entier naturel a, a^3 peut s'écrire comme différence de deux carrés.

4. En exprimant m et p en fonction de a, écrire $1\,000\,000$ comme différence de deux carrés.

Dessert : un exercice d'Olympiades, un vrai !

Exercice Académique 1 - Corse - 2018

Partie A



On construit deux carrés de **côtés entiers** : un grand carré de côté x et un petit carré de côté y, que l'on place à l'intérieur du plus grand.
On s'intéresse à l'aire de la **partie hachurée**, et en particulier aux valeurs que peut prendre cette aire.

1. Exprimer l'aire hachurée dans les cas particuliers suivants :
   (a) $x = 6$ et $y = 3$
   (b) $x = 505$ et $y = 503$
2. Déterminer un couple de valeurs x et y pour que l'aire hachurée soit égale à 3.
3. Déterminer de même un couple de valeurs x et y pour que l'aire hachurée soit égale à 5.
4. Déterminer deux couples de valeurs x et y pour que l'aire hachurée soit égale à 15.
5. Peut-on trouver des valeurs pour x et y pour que l'aire hachurée soit égale à 6 ?

Partie B

Un entier N sera dit décomposable en différence de deux carrés, s'il existe des entiers naturels x et y tels que :

$$N = x^2 - y^2$$

1. (a) Soit k un entier naturel. Développer l'expression $(k+1)^2 - k^2$.
   (b) Donner une décomposition du nombre 2017 en différence de deux carrés.
   (c) Démontrer que tout entier naturel **impair** est décomposable en différence de deux carrés.
2. Dans cette question, N désigne un entier naturel **pair**.
   (a) On suppose que N est décomposable en somme de deux carrés, donc que $N = x^2 - y^2$, où x et y désignent des entiers naturels. Montrer que N est un multiple de 4.
   (b) Réciproquement, on suppose que N est un multiple de 4. Montrer que N est décomposable en différence de deux carrés.
3. Tous les nombres entiers naturels sont-ils décomposables en différence de deux carrés ?

Partie C

On cherche maintenant à déterminer, pour un entier N donné, l'ensemble de toutes ses décompositions.

1. Dans cette question, N désigne un entier naturel **impair**.

   (a) On suppose que N est décomposable en différence de deux carrés, et on pose $N = (k+d)^2 - k^2$. Montrer qu'il existe un entier m tel que $N = m \times d$ et que $d \leqslant \sqrt{N}$.

   (b) Réciproquement, on suppose qu'il existe deux entiers m et d tels que $N = m \times d$ avec $d \leqslant \sqrt{N}$. Montrer que N est décomposable en différence de deux carrés.

   (c) En déduire toutes les décompositions des nombres 45 et 47.

   (d) Quels sont les nombres impairs admettant une unique décomposition ?

2. Dans cette question, N désigne un entier naturel **multiple de 4**.

   (a) Montrer que $N = (k+d)^2 - k^2$ si et seulement s'il existe deux entiers pairs m et d tels que $N = m \times d$ et $d \leqslant \sqrt{N}$.

   (b) En déduire toutes les décompositions des nombres 44 et 240.

   (c) Quels sont les multiples de 4 admettant une unique décomposition ?