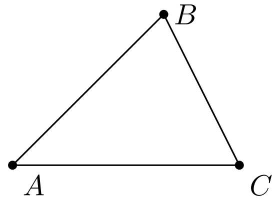
Olympiades de Mathématiques

Séance n°2 : Égalités dans le triangle

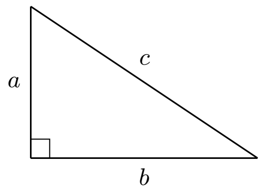
Mise en bouche

Quel est le plus court chemin entre deux points ? Il s'agit bien entendu de la ligne droite ! [1]
Cette “évidence” porte un nom : c'est l'**inégalité triangulaire**.
Dans un triangle ABC, on a toujours l'inégalité :

$$AC \leqslant AB + BC$$



Cette inégalité fait partie du très grand nombre de relations existantes entre les longueurs des côtés d'un triangle. Tout le monde connaît l'**égalité de Pythagore**, mais elle n'est vraie que dans un **triangle rectangle**.



$$c^2 = a^2 + b^2$$

Sans oublier la **somme des angles d'un triangle** : elle est toujours égale à 180° !

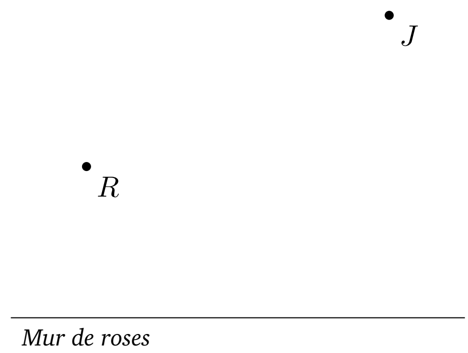
D'autres relations sont moins connues, mais toutes aussi remarquables.
Découvrons quelques unes d'entre elles.

1. Enfin presque... C'est vrai si les deux points sont dessinés au tableau. Mais ce n'est pas toujours le cas.

Hors d'oeuvre

Roméo part retrouver Juliette. Il décide de faire un détour par un mur recouvert de roses afin de lui ramener une jolie fleur. Mais Roméo ne veut pas perdre une seconde.

Quel chemin Roméo (R) doit-il emprunter pour cueillir une rose et rejoindre Juliette (J) au plus vite ?



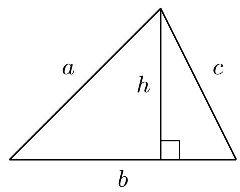
Entrée

L'aire d'un triangle se calcule à l'aide de la fameuse formule :

$$\mathscr{A} = \frac{base \times hauteur}{2}$$

Bien pratique, sauf qu'en général, on ne connaît pas de hauteur dans le triangle. Il doit bien exister une formule donnant l'aire du triangle en fonction de ses côtés...

Considérons le triangle ci-contre, dans lequel on a dessiné cette fameuse hauteur dont on ne connaît pas la longueur.



1. Démontrer que :

$$h^2 = a^2 - \frac{(a^2 - c^2 + b^2)^2}{4b^2}$$

2. En déduire que :

$$h^2 = \frac{(a+b+c)(a+c-b)(b+c-a)(a+b-c)}{4b^2}$$

3. Soit $p = \frac{1}{2}(a+b+c)$ le demi périmètre du triangle, et soit $\mathscr{A}$ l'aire du triangle.

   Déduire des questions précédentes la **formule de Héron** :

$$\mathscr{A} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

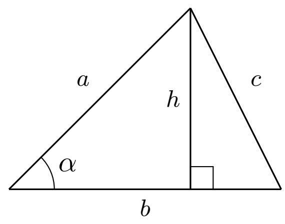
4. **Application :** déterminer l'aire d'un triangle équilatéral de côté c.

Plat principal

Le théorème de Pythagore est très puissant : il permet de calculer une longueur inconnue d'un triangle en connaissant les deux autres, ou encore de savoir si un mur est perpendiculaire au sol en prenant seulement trois mesures et en faisant marcher sa tête (ou sa calculatrice, au choix).
Cependant, l'égalité de Pythagore n'est vraie que dans les triangles rectangles...

Considérons le triangle ci-contre, non rectangle.

On note α l'angle opposé au côté de longueur c.



1. Démontrer que :
$$c^2 = (a\sin\alpha)^2 + (b - a\cos\alpha)^2$$
2. En déduire la **loi des cosinus** :
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\alpha$$
Cette formule, encore appelé **théorème d'Al Kashi**, est la **généralisation du théorème de Pythagore** aux triangles non rectangles. Elle permet de déterminer une longueur inconnue dans un triangle connaissant les deux autres longueurs et la valeur de l'angle opposé.
3. ABC est un triangle tel que $AB = \sqrt{2}$, $AC = 3$ et $\widehat{BAC} = \frac{\pi}{4}$. Déterminer la longueur BC.
4. ABC est un triangle tel que $AB = \sqrt{3}$, $AC = 1$ et $\widehat{ACB} = \frac{\pi}{3}$. Déterminer la longueur BC.
En plus de permettre le calcul de longueurs, le théorème d'Al-Kashi permet de déterminer la mesure approchée des angles dans un triangle dont on connaît les trois longueurs.
5. Exprimer $\cos\alpha$ en fonction de a,b et c.
6. **Application :** un triangle de mesures 13, 17 et 23 admet-il un angle obtus ?

Dessert

Sur la figure ci-contre, $ABCD$ est un carré et ABE et BCF sont des triangles équilatéraux.

Les points D, E et F sont-ils alignés ?