

Olympiades de Mathématiques

Séance n°4 : Échauffement

On définit l'opération \oplus sur l'ensemble des entiers relatifs \mathbb{Z} par :

$$a \oplus b = a + b - ab$$

1. Effectuer les calculs suivants :

$$1 \oplus 2 \quad 2 \oplus 4 \quad -1 \oplus 2 \quad 4 \oplus -3 \quad a \oplus a$$

2. Résoudre les équations suivantes dans \mathbb{Z} :

$$x \oplus 3 = 1 \quad 2 \oplus x = 0 \quad x \oplus 3 = 2$$

3. Montrer que quelque soient les entiers relatifs a et b , $a \oplus b$ est encore un entier relatif.
4. L'opération \oplus est dite **commutative** si quelque soient les entiers relatifs a et b , on a $a \oplus b = b \oplus a$.
L'opération \oplus est-elle commutative ?
5. On appelle **élément neutre** le nombre e tel que, pour tout entier relatif x , $e \oplus x = x \oplus e = x$.
Existe-t-il un élément neutre ?
6. On appelle **élément absorbant** le nombre a tel que, pour tout entier relatif x , $a \oplus x = x \oplus a = a$.
Existe-t-il un élément absorbant ?
7. Un entier relatif a est dit **inversible** s'il existe un entier relatif b tel que $a \oplus b = e$, où e est l'élément neutre.
Existe-t-il des éléments inversibles pour \oplus ?