Exercices : Second Degré (2)

Exercice 1.
On considère la fonction f définie sur $[-5\,;5]$ par :

$$f(x) = x^2 + 3x - 5$$

1. Déterminer la forme canonique de $f(x)$.
2. Donner le tableau de variations de f.
3. D'après le tableau de variations, combien l'équation $f(x) = 0$ admet-elle de solutions sur l'intervalle $[-5\,;5]$?
4. Déterminer ces solutions par le calcul.

Exercice 2.
Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes, en précisant les éventuelles valeurs interdites :

1. $(3x^2 + 5x - 8)(9x^2 - 6x + 1) = 0$
2. $5x^3 + 4x^2 - x = 0$
3. $x - 3 = \dfrac{2}{x}$
4. $\dfrac{x}{x-1} + \dfrac{1}{x-2} = 0$

Exercice 3.
Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes :

1. $(x + 5)(3x^2 + 6x - 24) > 0$
2. $\dfrac{3x^2 - 5x}{-2x^2 + 5x + 3} < 0$
3. $\dfrac{1}{x} > \dfrac{x}{x+2}$
4. $\dfrac{x}{x+1} \leqslant \dfrac{3}{x^2 - x - 2}$

Exercice 4.
Déterminer l'ensemble de définition des fonctions suivantes :

$$f(x) = \frac{x-1}{x^2 - x - 2} \qquad g(x) = \sqrt{-3x^2 + 4x - 1}$$

Exercice 5.
On considère l'équation (E) suivante :

$$2x^3 + 3x^2 - 8x + 3 = 0$$

1. Déterminer une solution évidente x_0.
2. Déterminer 3 réels a, b et c tels que :
$$2x^3 + 3x^2 - 8x + 3 = (x - x_0)(ax^2 + bx + c)$$
3. En déduire les solutions de l'équation (E).
4. Résoudre de même l'équation :
$$x^3 - x^2 - x - 2 = 0$$

Exercice 6.

1. Développer l'expression $(x - 1)(x^2 + x + 1)$.
2. En déduire les solutions sur $\mathbb{R}$ de $x^2 < \frac{1}{x}$.

Exercice 7. ★
On considère l'équation (E) suivante :

$$4x^4 - 13x^3 + 11x^2 - 13x + 4 = 0$$

1. Vérifier que 0 n'est pas solution de (E).
2. On pose $X = x + \frac{1}{x}$
   (a) Exprimer X^2 en fonction de x.
   (b) Montrer que :
   X est solution de $X^2 - 13X + 3 = 0 \implies x$ est solution de (E)
   (c) Résoudre l'équation $X^2 - 13X + 3 = 0$ et en déduire les solutions de (E).

Exercice 8. ★
Déterminer, en fonction du réel a, les solutions de l'équation : $x + \dfrac{1}{x} = a$