CHAPITRE 2

Probabilités Conditionnelles - Indépendance

Objectifs

1. Définir une probabilité conditionnelle
2. Utiliser la formule des probabilités totales, un arbre pondéré
3. Caractériser l'indépendance de deux événements

2.1 Quelques rappels sur les probabilités

On rappelle que pour calculer la probabilité d'un certain événement, il faut commencer par modéliser le problème.
À une expérience aléatoire donnée, on associe un **univers** Ω, qui représente l'ensemble des issues possibles de l'expérience. Un événement A est un ensemble d'issues, et la probabilité qu'il se réalise est notée généralement $p(A)$: c'est un nombre compris entre 0 et 1, que l'on calcule - si possible - à l'aide de méthodes diverses, comme l'équiprobabilité, un arbre de probabilité...

Exemple. Une urne opaque contient 7 boules rouges, 5 boules blanches et 3 boules vertes, indescernables au toucher.

1. On tire une boule de l'urne et on note sa couleur.

   (a) Décrire :

      i. l'univers Ω associé à cette expérience aléatoire.

      ii. la loi de probabilité associée à cet univers

   (b) On définit :

   R : « Obtenir une boule rouge » V : « Obtenir une boule verte »

   Décrire et déterminer la probabilité de chaque événement suivant :

      i. $\overline{R}$

      ii. $R \cap V$

      iii. $R \cup V$

2. On tire maintenant deux boules de l'urne, successivement et sans remise.

   (a) Représenter un arbre de probabilités associé aux différents tirages.

   (b) Déterminer la probabilité de tirer une boule rouge au second tirage :

      i. si la 1ère boule tirée est rouge

      ii. si la 1ère boule tirée est blanche

      iii. si la 1ère boule tirée est verte

Dans ce dernier cas, les probabilités de tirer une boule rouge au second tirage dépendent du résultat du premier tirage : on parle alors de **probabilités conditionnelles**.

2.2 Probabilités conditionnelles

Définition. Soient A et B deux événements, A étant de probabilité non nulle.
On appelle **probabilité de** B **sachant** A le nombre noté $p_A(B)$ défini par :

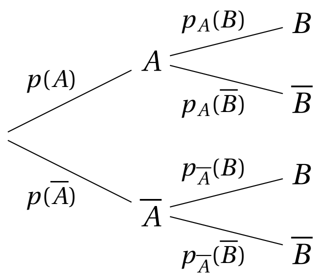
$$p_A(B) = \frac{p(A \cap B)}{p(A)}$$

Le nombre $p_A(B)$ se lit : " probabilité de B sachant A ".

Propriété. *Soient A et B deux événements, A étant de probabilité non nulle. On a :*

$$p(A \cap B) = p(A) \times p_A(B)$$

Remarque. Sur un arbre de probabilité, on trouve des probabilités conditionnelles !



Exemple. Une urne opaque contient 7 boules rouges et 5 boules blanches, indescernables au toucher. On tire successivement et sans remise deux boules dans l'urne. On note :

- R_1 : "La première boule tirée est rouge"
- R_2 : "La deuxième boule tirée est rouge"

La probabilité de tirer deux boules rouges est $p(R_1 \cap R_2) = p(R_1) \times p_{R_1}(R_2)$.
On a $p(R_1) = \frac{7}{12}$ et $p_{R_1}(R_2) = \frac{6}{11}$ car sachant qu'une première boule rouge a été tirée, il reste donc 6 boules rouges parmi les 11 boules que contient dorénavant l'urne. Ainsi, on a :

$$p(R_1 \cap R_2) = \frac{7}{12} \times \frac{6}{11} = \mathbf{\frac{7}{22}}$$

Théorème. *Pour tout événement A de probabilité non nulle, la fonction p_A définie sur Ω est une loi de probabilité, appelée* **loi de probabilité conditionnelle sachant A***. Elle vérifie notamment :*

- $p_A(\Omega) = 1$
- *Pour tout événement B,* $0 \leqslant p_A(B) \leqslant 1$

2.3 Probabilités totales

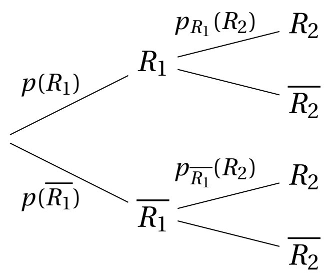
Définition. Soient $A_1, A_2, \dots, A_n$ des événements **deux à deux disjoints** d'un univers Ω.
Si $A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n = \Omega$, on dit que $A_1, A_2, \dots, A_n$ forment une **partition** de Ω.

Théorème. *Soient $A_1, A_2, \dots, A_n$ des événements de probabilités non nulles, réalisant une partition de l'univers Ω. Alors, pour tout événement B, on a :*

$$\begin{aligned} p(B) &= \sum_{k=1}^{n} p(A_k \cap B) \\ &= p(A_1 \cap B) + p(A_2 \cap B) + \dots + p(A_n \cap B) \end{aligned}$$

où $p(A_k \cap B) = p(B) \times p_{A_k}(B)$ avec $1 \leqslant k \leqslant n$.

Exemple. Comment calculer $p(R_2)$ dans l'exemple précédent ? On peut s'aider d'un arbre :



R_1 et $\overline{R_1}$ forment une partition de l'univers, car :

$$R_1 \cap \overline{R_1} = \emptyset \qquad \text{et} \qquad R_1 \cup \overline{R_1} = \Omega$$

La formule des probabilités totales appliquée à l'événement R_2 nous donne :

$$p(R_2) = p(R_1) \times p_{R_1}(R_2) + p(\overline{R_1}) \times p_{\overline{R_1}}(R_2)$$

Soit après calcul :

$$p(R_2) = \frac{7}{12} \times \frac{6}{11} + \frac{5}{12} \times \frac{7}{11} = \frac{7}{12}$$

Remarque. $p(R_1) = p(R_2)$, et c'est bien normal : l'ordre de tirage n'a, au final, pas d'importance !

Formule des probabilités totales et arbre pondéré

Sur un arbre pondéré, on applique les règles suivantes, utilisées depuis le collège et justifiées aujourd'hui :

1. **Règle de la somme** : la somme des probabilités inscrites sur les branches partant d'un même noeud est égale à 1
2. **Règle du produit** : la probabilité d'un chemin, constitué d'une succession de branches, est égale au produit des probabilités inscrites sur ses branches
3. **Application de la formule des probabilités totales** : la probabilité d'un événement A inscrit aux extrémités de plusieurs branches est égale à la somme des probabilités des chemins qui mènent à A

2.4 Indépendance

Définition. Deux événements A et B sont dits **indépendants** lorsque $p(A \cap B) = p(A) \times p(B)$.

Remarque. Une conséquence immédiate est que, si $p(B) \neq 0$, $p_B(A) = p(A)$.
En d'autres termes, la probabilité que l'événement A se réalise ne dépend pas de la réalisation de l'événement B (à condition que B soit réalisable).

Remarque. Il ne faut pas confondre les termes *indépendants* et *incompatibles* :

- A et B sont indépendants si $p(A \cap B) = p(A) \times p(B)$.
- A et B sont incompatibles si $A \cap B = \emptyset$.

Exemple. On lance deux fois une pièce de monnaie bien équilibrée. On note :

- A : "Pile sort en premier"
- B : "Pile sort en second"

L'univers associé à cette expérience est $\Omega = \{PP, PF, FP, FF\}$.
Il y a équiprobabilité, et on a :

$$A = \{PP, PF\} \qquad B = \{PP, FP\} \qquad A \cap B = \{PP\}$$

Ainsi :

$$p(A) = \frac{1}{2} \qquad p(B) = \frac{1}{2} \qquad p(A \cap B) = \frac{1}{4}$$

Comme $p(A \cap B) = p(A) \times p(B)$, A et B sont indépendants.

Exemple. A et B sont deux événements tels que $p(A) = 0,4$, $p(B) = 0,6$ et $p(A \cup B) = 0,74$.
Montrer que A et B sont indépendants.