CHAPITRE 4

Fonctions trigonométriques

Objectifs

1. Se repérer sur le cercle trigonométrique
2. Définir le cosinus et le sinus d’un nombre réel
3. Étudier les fonctions trigonométriques

4.1 Introduction

Jusqu'à présent en géométrie, nous avons toujours mesuré les angles en **degrés**.

Un « tour complet » équivaut à 360°, un demi-tour à 180°, et un quart de tour à 90°.
Le nombre 360 n'a pas été choisi au hasard. Il possède un grand nombre de diviseurs (2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10, 12, 15...), ce qui est pratique si l'on veut « fractionner » un cercle en parties égales.

Sur un cercle de rayon 1, un tour complet (la circonférence du cercle) est égal à 2π, un demi-tour à π, et un quart de tour à $\frac{\pi}{2}$.
On peut ainsi associer chaque angle à une certaine valeur en fonction de π.

$$\begin{aligned} 360° &\iff 2\pi \\ 180° &\iff \pi \\ 90° &\iff \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

Ces « nouvelles mesures » d'angles sont appelées **radians**.

Degrés et radians sont proportionnels :

$$\begin{aligned} & 2\pi rad = 360° \\ \Longrightarrow \quad & 1° = \frac{\pi}{180} rad \\ \Longrightarrow \quad & 1 rad = \frac{180}{\pi}° \end{aligned}$$

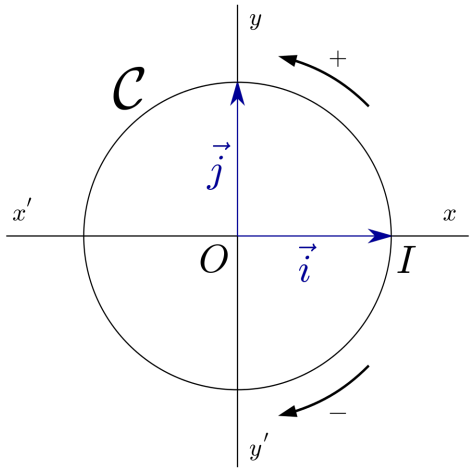
Degrés	0	30	45	60	90	180	360
Radians	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	2π

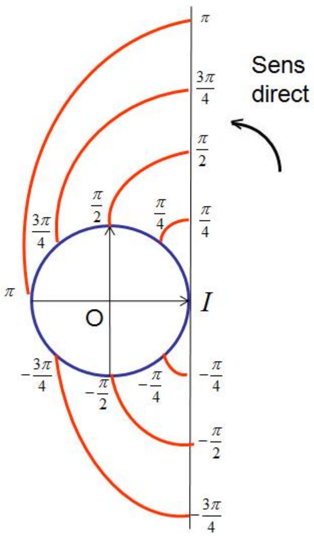
4.2 Cercle trigonométrique

4.2.1 Enroulement de la droite numérique

Définition. On munit le plan d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}\,; \vec{j}\,)$.
Le **cercle trigonométrique** est le cercle $\mathscr{C}$ de centre O et de rayon 1, sur lequel on choisit une **orientation** :

- le sens **direct** (ou sens *positif* ou sens *trigonométrique*) : c'est le sens contraire au sens de rotation des aiguilles d'une montre
- le sens **indirect** (ou sens *négatif*) : c'est le sens de rotation des aiguilles d'une montre

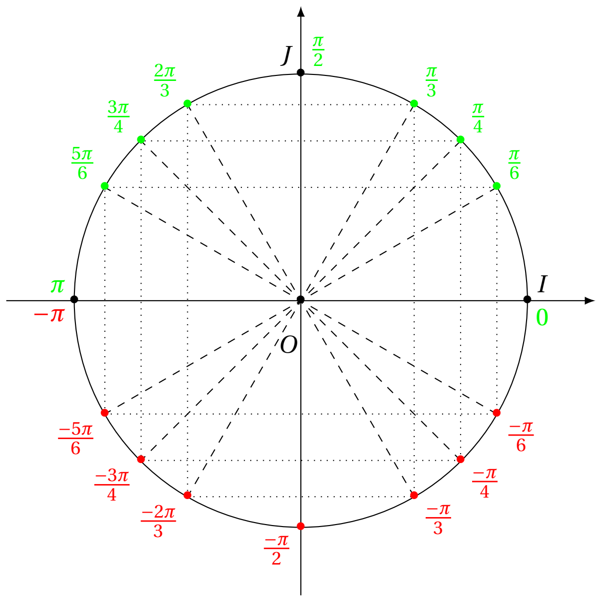




Propriété. *À tout nombre réel x, on associe un unique point M sur le cercle trigonométrique de la manière suivante : on "enroule" autour du cercle un axe orienté, gradué, d'origine I.*
Le point de l'axe d'abscisse x se superpose alors à un unique point M du cercle.

Propriété. *Valeurs remarquables*

☞ *Schéma vierge à distribuer aux élèves*



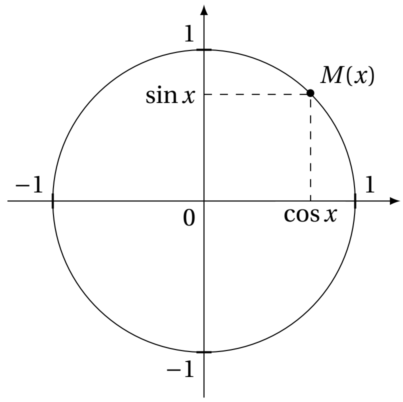
☞ *Vert : Sens +* ☞ *Rouge : Sens -*

Propriété.
- *Si x est un nombre réel et M le point du cercle trigonométrique associé à x, alors M est associé à tous les nombres réels de la forme $x + k \times 2\pi$, où $k \in \mathbb{Z}$.*
- *Si x et x' désignent deux nombres réels tels que $x - x' = k \times 2\pi, k \in \mathbb{Z}$, alors x et x' sont associés au même point du cercle trigonométrique.*

4.2.2 Cosinus et sinus d'un nombre réel

Définition. Soit x un nombre réel, et soit $M(x_M\ ;\ y_M)$ son image sur le cercle trigonométrique. On définit le cosinus et le sinus du nombre x en posant :

$$\cos x = x_M \qquad \sin x = y_M$$



Propriété. *Pour tout nombre réel x, on a :*

$$-1 \leqslant \cos x \leqslant 1 \qquad -1 \leqslant \sin x \leqslant 1 \qquad (\cos x)^2 + (\sin x)^2 = 1$$

Démonstration. *Comme M est un point du cercle, alors son abscisse est toujours comprise entre -1 et 1. Or, cette abscisse est par définition égale à $\cos x$. On a donc, quelque soit le point M du cercle, et donc quelque soit le réel x, la relation :*

$$-1 \leqslant \cos x \leqslant 1$$

Par un raisonnement analogue sur les ordonnées, on a pour tout réel x :

$$-1 \leqslant \sin x \leqslant 1$$

La dernière égalité découle du calcul de la distance OM, où $O(0,0)$ est l'origine du repère. En effet, $OM = \sqrt{(x_M - x_O)^2 + (y_M - y_O)^2}$ (formule vue en Seconde). Comme $x_M = \cos x$ et $y_M = \sin x$ par définition, et comme $x_0 = y_0 = 0$, alors on a $OM = \sqrt{(\cos x)^2 + (\sin x)^2}$. En mettant au carré :

$$OM^2 = (\cos x)^2 + (\sin x)^2$$

Mais $[OM]$ est un rayon du cercle trigonométrique, de rayon 1. Donc $OM = 1$, et ainsi :

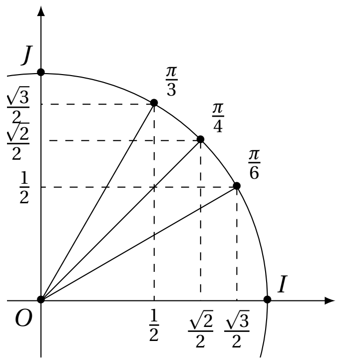
$$(\cos x)^2 + (\sin x)^2 = 1$$

□

☞ *On note $(\cos x)^2 = \cos^2 x$ et $(\sin x)^2 = \sin^2 x$, de sorte que l'égalité précédente s'écrit :* $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$

Propriété. *Valeurs remarquables de cos et sin*

Nombre x	*0*	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
Angle associé	*0°*	*30°*	*45°*	*60°*	*90°*
$\cos x$	*1*	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	*0*
$\sin x$	*0*	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	*1*



☞ *Tableau à connaître par coeur !!*

4.3 Fonctions trigonométriques

Définition.

- La fonction $x \in \mathbb{R} \mapsto \cos x$ est appelée **fonction cosinus**.
- La fonction $x \in \mathbb{R} \mapsto \sin x$ est appelée **fonction sinus**.

4.3.1 Parité et Périodicité

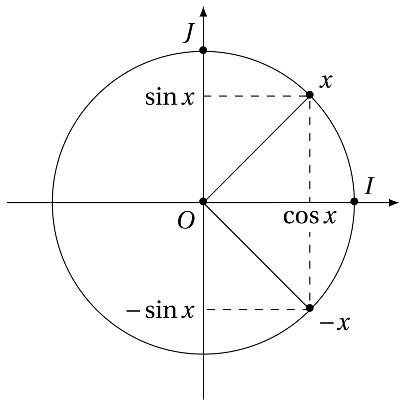
Propriété. *Pour tout nombre réel x :*

- $\cos(-x) = \cos x$

  On dit que la fonction cosinus est ***paire****.*

- $\sin(-x) = -\sin x$

  On dit que la fonction sinus est ***impaire****.*



Propriété. *Pour tout nombre réel x :*

$$\cos(x+2\pi) = \cos x \qquad \sin(x+2\pi) = \sin x$$

On dit que les fonctions cosinus et sinus sont ***périodiques*** *de période* 2π.

4.3.2 Courbes représentatives

☞ *Fichier Geogebra*

Propriété.

- *La fonction cosinus est décroissante sur* $[0;\pi]$.

x	0	$\frac{\pi}{2}$	π
$\cos x$	1 ↘	0 ↘	-1

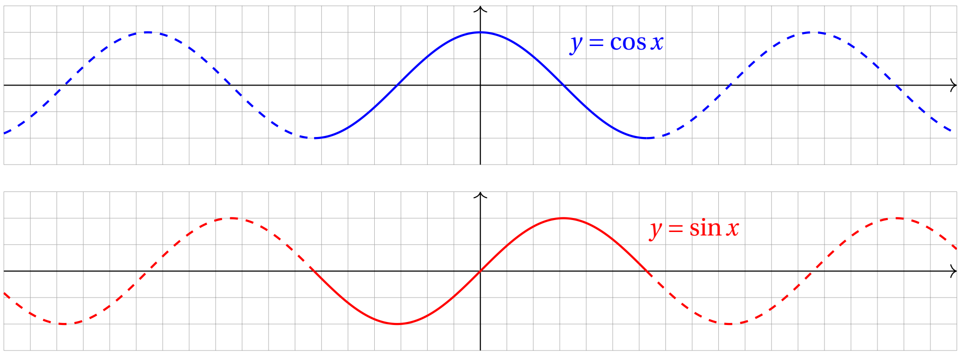
- *La fonction sinus est croissante sur* $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$ *et décroissante sur* $\left[\frac{\pi}{2};\pi\right]$.

x	0	$\frac{\pi}{2}$	π
$\sin x$	0 ↗	1 ↘	0

Propriété.

- *La fonction **cosinus** étant paire, sa courbe représentative est **symétrique par rapport à l'axe des ordonnées**.*
- *La fonction **sinus** étant impaire, sa courbe représentative est **symétrique par rapport à l'origine du repère**.*

Propriété. *Les fonctions cosinus et sinus étant 2π-périodiques, leurs courbes représentatives sont invariantes par translation de vecteur $2\pi\vec{i}$.*

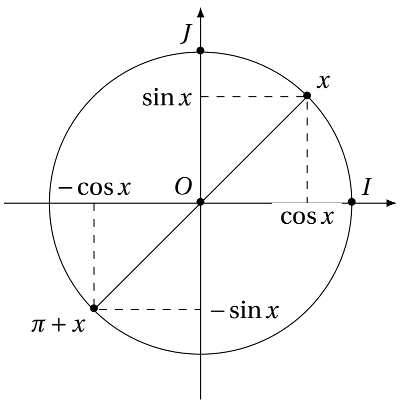


4.3.3 Angles associés

Propriété. *Pour tout réel x :*

$$\cos(\pi + x) = -\cos x$$

$$\sin(\pi + x) = -\sin x$$

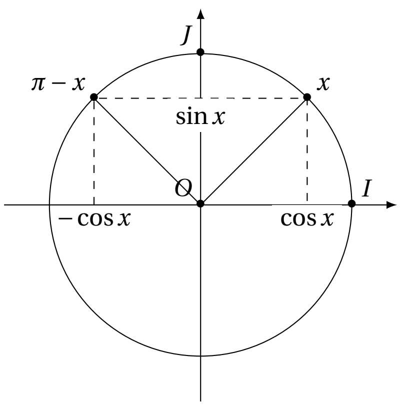


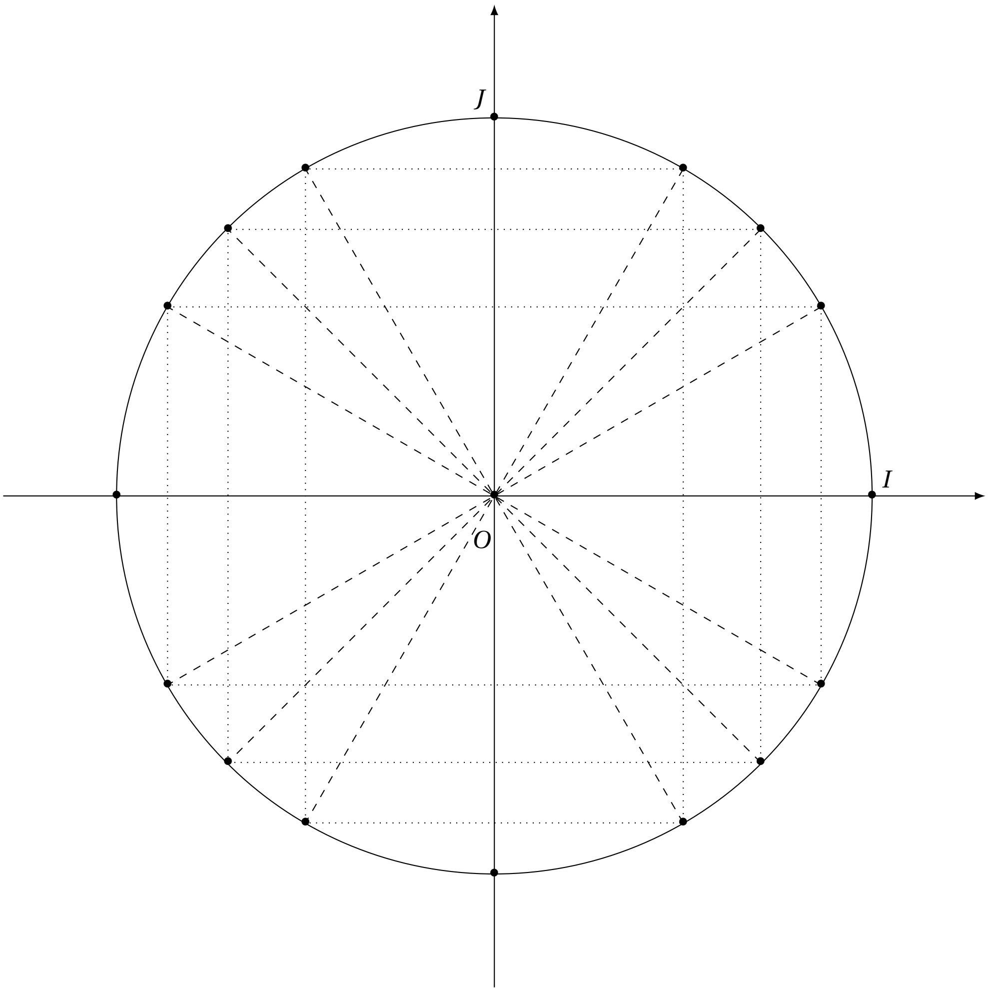
☞ *Ajouter π revient à faire un demi-tour*

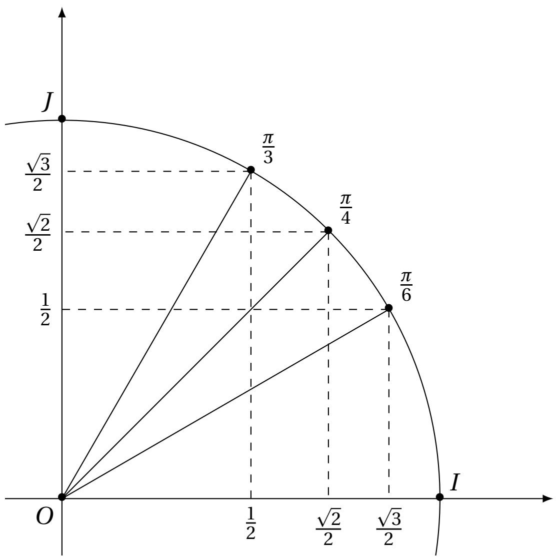
Propriété. *Pour tout réel x :*

$$\cos(\pi - x) = -\cos x$$

$$\sin(\pi - x) = \sin x$$




J
I
O


J
$\frac{\pi}{3}$
$\frac{\pi}{4}$
$\frac{\pi}{6}$
$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\frac{\sqrt{2}}{2}$
$\frac{1}{2}$
I
O
$\frac{1}{2}$
$\frac{\sqrt{2}}{2}$
$\frac{\sqrt{3}}{2}$