Trigonométrie

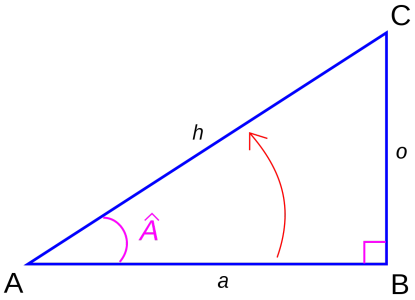
1ère

Spécialité Mathématiques

2020/2021

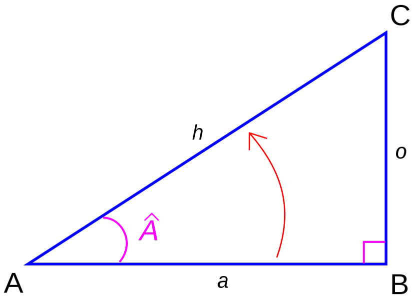
Quelques rappels

Trigonométrie de collège



Quelques rappels

Trigonométrie de collège



$$\cos \widehat{A} = \frac{\text{adjacent}}{\text{hypothénuse}} = \frac{AB}{AC}$$

$$\sin \widehat{A} = \frac{\text{opposé}}{\text{hypothénuse}} = \frac{BC}{AC}$$

$$\tan \widehat{A} = \frac{\text{opposé}}{\text{adjacent}} = \frac{BC}{AB}$$

Quelques rappels

Trigonométrie de collège

La somme des angles d'un triangle est égale à ...

Quelques rappels

Trigonométrie de collège

La somme des angles d'un triangle est égale à ... **180 degrés** !

Quelques rappels

Trigonométrie de collège

La somme des angles d'un triangle est égale à … **180 degrés** !

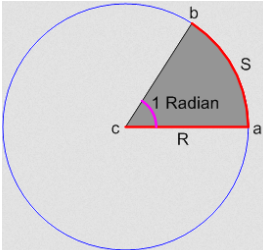
Mais pourquoi 180 ?

Une nouvelle unité : le radian

Plutôt que de compter les angles en degrés, on introduit une nouvelle unité, appelée **radian**.

Une nouvelle unité : le radian

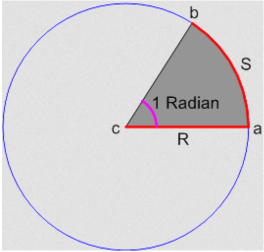
Plutôt que de compter les angles en degrés, on introduit une nouvelle unité, appelée **radian**.



- Étant donné un cercle de rayon R, 1 radian correspond à la mesure de l'angle formé par un arc de longueur $S = R$.

Une nouvelle unité : le radian

Plutôt que de compter les angles en degrés, on introduit une nouvelle unité, appelée **radian**.



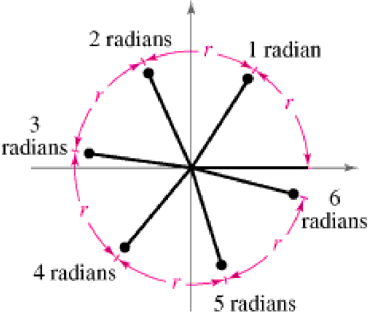
- Étant donné un cercle de rayon R, 1 radian correspond à la mesure de l'angle formé par un arc de longueur $S = R$.
- **Cette valeur ne dépend pas du rayon R du cercle !**

Une nouvelle unité : le radian

La mesure d'un angle est **proportionnelle** à la longueur de l'arc correspondant.

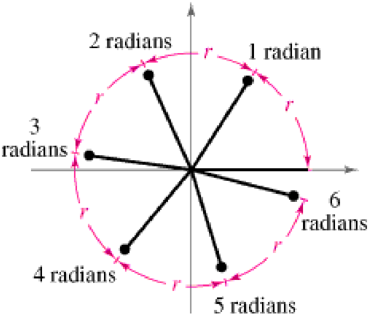
Une nouvelle unité : le radian

La mesure d'un angle est **proportionnelle** à la longueur de l'arc correspondant.



Une nouvelle unité : le radian

La mesure d'un angle est **proportionnelle** à la longueur de l'arc correspondant.



Pour un tour complet, la longueur de l'arc est égale à :

$$S = 2\pi R$$

Ainsi, un tour complet équivaut à 2π radians. On a donc :

$$\boxed{2\pi \text{ rad.} = 360^\circ}$$

Une nouvelle unité : le radian

Degrés et radians sont proportionnels.

Une nouvelle unité : le radian

Degrés et radians sont proportionnels.

$$2\pi \text{ rad.} = 360^\circ \implies 1 \text{ rad.} = \frac{360^\circ}{2\pi} \simeq 57.3^\circ$$

Une nouvelle unité : le radian

Degrés et radians sont proportionnels.

$$2\pi \text{ rad.} = 360^\circ \quad \Longrightarrow \quad 1 \text{ rad.} = \frac{360^\circ}{2\pi} \simeq 57.3^\circ$$

Mais encore :

$$2\pi \text{ rad.} = 360^\circ \quad \Longrightarrow \quad \pi \text{ rad.} = \frac{360^\circ}{2} = 180^\circ$$

Une nouvelle unité : le radian

Degrés et radians sont proportionnels.

$$2\pi \text{ rad.} = 360^\circ \quad \Longrightarrow \quad 1 \text{ rad.} = \frac{360^\circ}{2\pi} \simeq 57.3^\circ$$

Mais encore :

$$2\pi \text{ rad.} = 360^\circ \quad \Longrightarrow \quad \pi \text{ rad.} = \frac{360^\circ}{2} = 180^\circ$$

Degrés	0	30	45	60	90	180	360
Radians							2π

☞ *Exercices 1, 2 de la feuille d'exercices*

Le cercle trigonométrique

Définition

- On se place dans un repère orthonormé $(O; \overrightarrow{i}; \overrightarrow{j})$.

Le cercle trigonométrique

Définition

- On se place dans un repère orthonormé $(O; \overrightarrow{i}; \overrightarrow{j})$.
- **Cercle trigonométrique** : cercle de centre O et de rayon 1.

Le cercle trigonométrique

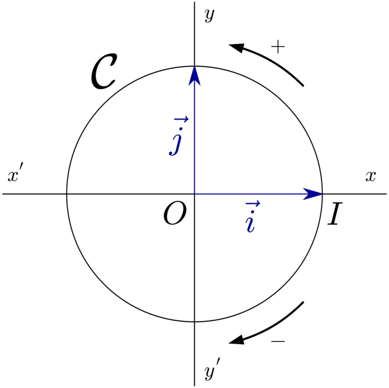
Définition

- On se place dans un repère orthonormé $(O; \overrightarrow{i}; \overrightarrow{j})$.
- **Cercle trigonométrique** : cercle de centre O et de rayon 1.
- On définit un **sens** de parcours du cercle.

Le cercle trigonométrique

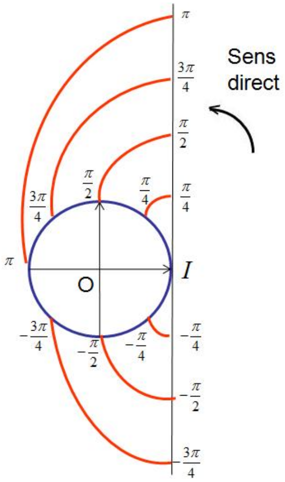
Définition

- On se place dans un repère orthonormé $(O; \overrightarrow{i}; \overrightarrow{j})$.
- **Cercle trigonométrique** : cercle de centre O et de rayon 1.
- On définit un **sens** de parcours du cercle.



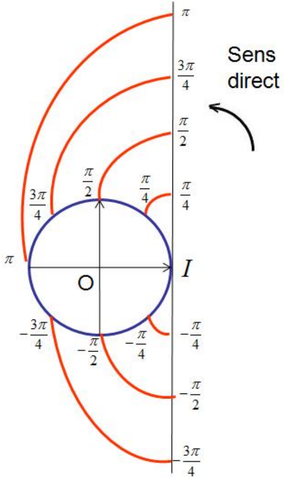
Le cercle trigonométrique

Enroulement de la droite réelle



Le cercle trigonométrique

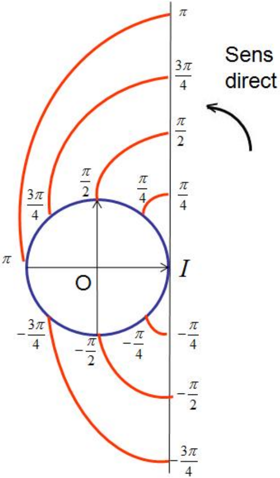
Enroulement de la droite réelle



- On “enroule” une droite imaginaire verticale passant par I

Le cercle trigonométrique

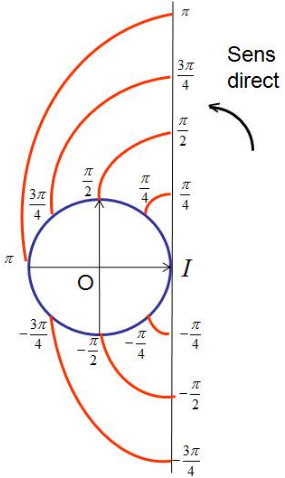
Enroulement de la droite réelle



- On "enroule" une droite imaginaire verticale passant par I
- Chaque point de cette droite est repéré par son abscisse (positive vers le haut, négative vers le bas)

Le cercle trigonométrique

Enroulement de la droite réelle



- On “enroule” une droite imaginaire verticale passant par I
- Chaque point de cette droite est repéré par son abscisse (positive vers le haut, négative vers le bas)
- De cette façon, on associe un réel à chaque point du cercle

Le cercle trigonométrique

Enroulement de la droite réelle

- Le cercle trigonométrique étant de rayon 1, son périmètre est :

$$2\pi \times R = 2\pi \times 1 = \boxed{2\pi}$$

Le cercle trigonométrique

Enroulement de la droite réelle

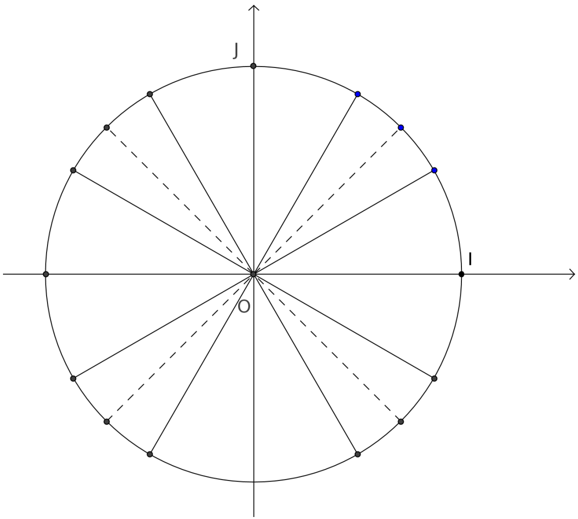
- Le cercle trigonométrique étant de rayon 1, son périmètre est :

$$2\pi \times R = 2\pi \times 1 = \boxed{2\pi}$$

- En particulier :
  - le nombre π se retrouve "à gauche" *(demi-tour)*
  - le nombre 2π se retrouve... sur le point I ! *(tour complet)*

Le cercle trigonométrique

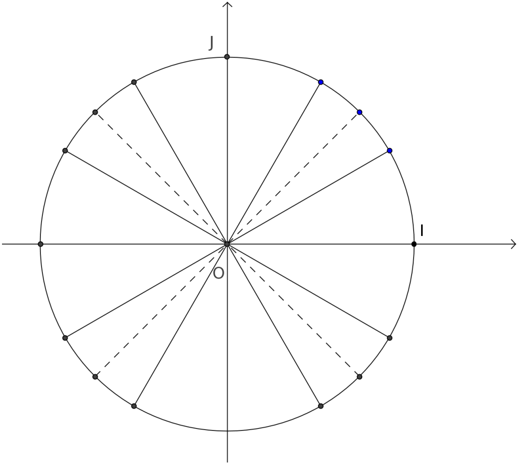
Valeurs remarquables



Le cercle trigonométrique

Valeurs remarquables

Où se trouvent les nombres suivants ?



5π $\quad -3\pi$

$\dfrac{4\pi}{3}$ $\quad \dfrac{7\pi}{3}$

$\dfrac{11\pi}{4}$ $\quad -\dfrac{5\pi}{6}$

2020π

Le cercle trigonométrique

Propriété

Le cercle trigonométrique

Propriété

- Si x est un nombre réel et M le point du cercle trigonométrique associé à x, alors M est associé à tous les nombres réels de la forme $x + k \times 2\pi$, où $k \in \mathbb{Z}$

Le cercle trigonométrique

Propriété

- Si x est un nombre réel et M le point du cercle trigonométrique associé à x, alors M est associé à tous les nombres réels de la forme $x + k \times 2\pi$, où $k \in \mathbb{Z}$
- Si x et x' désignent deux nombres réels tels que $x' = x + k \times 2\pi$, avec $k \in \mathbb{Z}$, alors x et x' sont associés au même point du cercle trigonométrique

Le cercle trigonométrique

Propriété

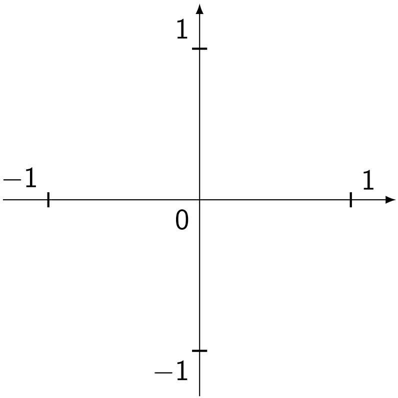
- Si x est un nombre réel et M le point du cercle trigonométrique associé à x, alors M est associé à tous les nombres réels de la forme $x + k \times 2\pi$, où $k \in \mathbb{Z}$
- Si x et x' désignent deux nombres réels tels que $x' = x + k \times 2\pi$, avec $k \in \mathbb{Z}$, alors x et x' sont associés au même point du cercle trigonométrique

Exemple

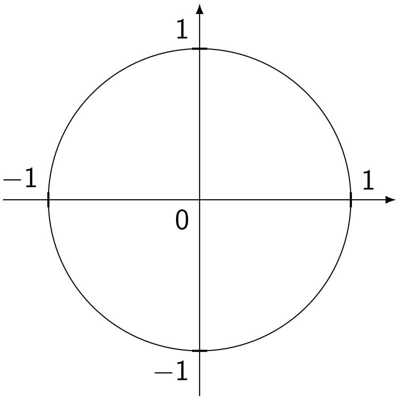
Montrer que $\frac{17\pi}{4}$ et $\frac{\pi}{4}$ sont associés au même point du cercle trigonométrique.

☞ *Exercices 3, 4 de la feuille d'exercices*

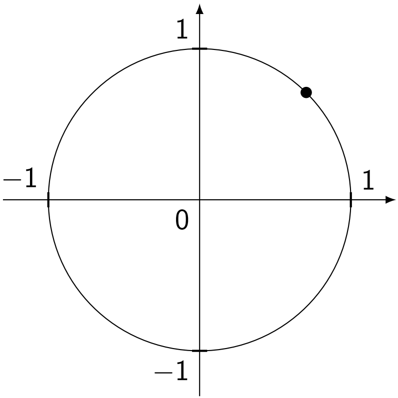
Cosinus et Sinus d'un nombre réel



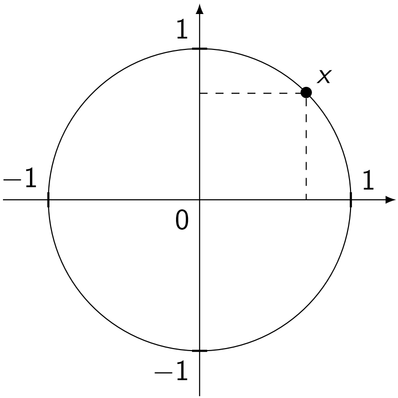
Cosinus et Sinus d'un nombre réel



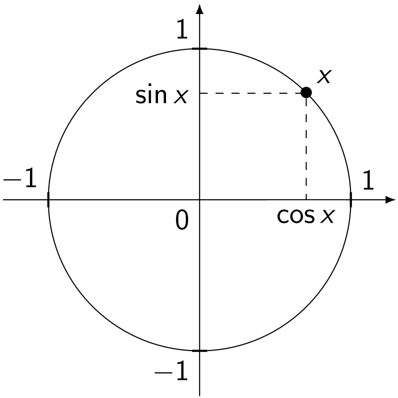
Cosinus et Sinus d'un nombre réel



Cosinus et Sinus d'un nombre réel



Cosinus et Sinus d'un nombre réel



Cosinus et Sinus d'un nombre réel

Définition

Soit x un nombre réel, et soit $M\,(x_M \ ;\ y_M)$ son image sur le cercle trigonométrique. On définit le cosinus et le sinus du nombre x en posant :

$$\cos x = x_M \qquad\qquad \sin x = y_M$$

Propriété

Pour tout réel x, on a :

Cosinus et Sinus d'un nombre réel

Propriété immédiate

Propriété

Pour tout réel x, on a :

$$-1 \leqslant \cos x \leqslant 1$$

$$-1 \leqslant \sin x \leqslant 1$$

Cosinus et Sinus d'un nombre réel

Propriété immédiate

Propriété

Pour tout réel x, on a :

$$-1 \leqslant \cos x \leqslant 1$$

$$-1 \leqslant \sin x \leqslant 1$$

$$\cos^2 x + \sin^2 x = 1$$

Cosinus et Sinus d'un nombre réel

Valeurs remarquables

Nombre x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
Angle associé	$0°$	$30°$	$45°$	$60°$	$90°$
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1

Cosinus et Sinus d'un nombre réel

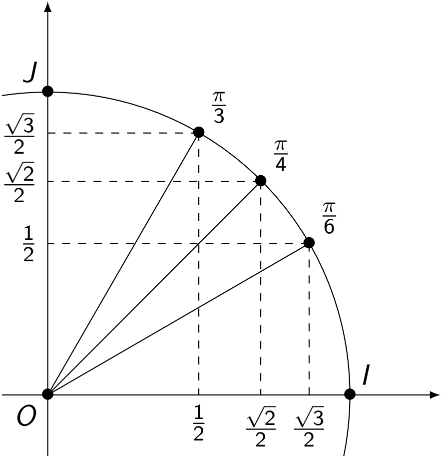
Valeurs remarquables

Nombre x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
Angle associé	0°	30°	45°	60°	90°
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1

☞ *À connaitre par coeur !*

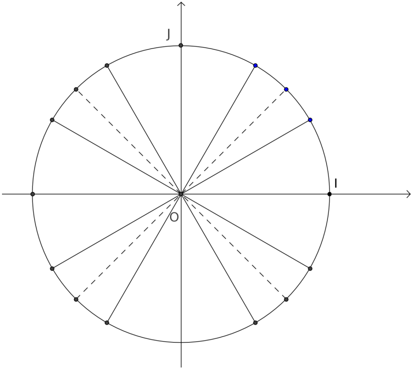
Cosinus et Sinus d'un nombre réel

Valeurs remarquables



Cosinus et Sinus d'un nombre réel

Exercice



Calculer :

$$\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) \qquad \sin\left(\frac{\pi}{4}\right)$$

$$\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) \qquad \sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)$$

$$\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) \qquad \sin\left(\frac{3\pi}{4}\right)$$

$$\cos\left(3\pi\right) \qquad \sin\left(\frac{17\pi}{2}\right)$$

Fonctions trigonométriques

Définition

- La fonction $x \in \mathbb{R} \mapsto \cos x$ est appelée **fonction cosinus**.
- La fonction $x \in \mathbb{R} \mapsto \sin x$ est appelée **fonction sinus**.

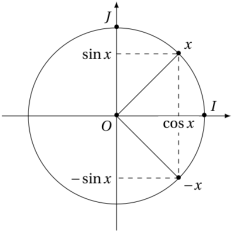
Fonctions trigonométriques

Parité et Périodicité

Propriété

Pour tout nombre réel x :

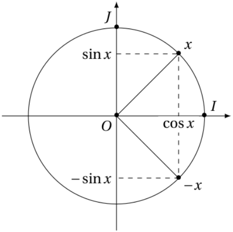
- $\cos(-x) = \cos x$
  La fonction cosinus est dite **paire**.
- $\sin(-x) = -\sin x$
  La fonction sinus est dite **impaire**.



Propriété

Pour tout nombre réel x :

- $\cos(-x) = \cos x$
  La fonction cosinus est dite **paire**.
- $\sin(-x) = -\sin x$
  La fonction sinus est dite **impaire**.



Propriété

Pour tout nombre réel x :

$$\cos(x + 2\pi) = \cos x \qquad \sin(x + 2\pi) = \sin x$$

On dit que les fonctions cosinus et sinus sont **périodiques** de période 2π, ou encore 2π-périodiques.

Fonctions trigonométriques

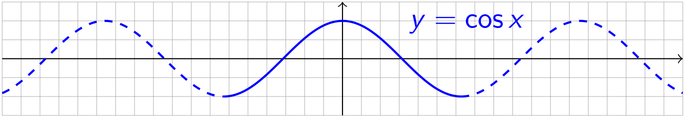
Courbes représentatives

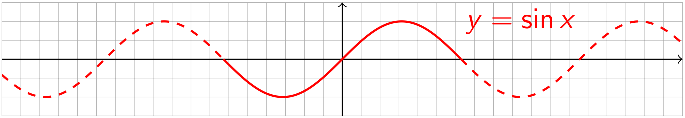
☞ *Construction : fichier Geogebra*

Fonctions trigonométriques

Courbes représentatives

☞ *Construction : fichier Geogebra*





Propriété

- La fonction **cosinus** étant paire, sa courbe représentative est **symétrique par rapport à l'axe des ordonnées**.
- La fonction **sinus** étant impaire, sa courbe représentative est **symétrique par rapport à l'origine du repère**.

Propriété

- La fonction **cosinus** étant paire, sa courbe représentative est **symétrique par rapport à l'axe des ordonnées**.
- La fonction **sinus** étant impaire, sa courbe représentative est **symétrique par rapport à l'origine du repère**.

Propriété Les fonctions cosinus et sinus étant 2π-périodiques, leurs courbes représentatives sont invariantes par translation de vecteur $2\pi\overrightarrow{i}$.

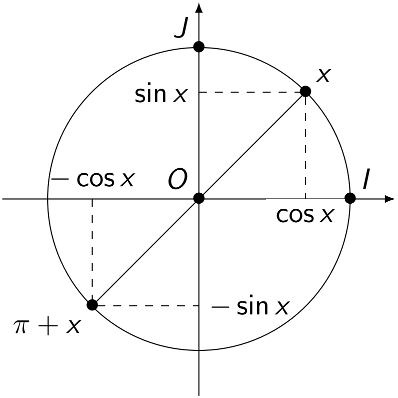
Propriété

Pour tout réel x :

$$\cos(\pi + x) = -\cos x$$

$$\sin(\pi + x) = -\sin x$$

☞ *Ajouter π revient à faire un demi-tour*



Fonctions trigonométriques

Angles associés

Propriété

Pour tout réel x :

$$\cos(\pi - x) = -\cos x$$

$$\sin(\pi - x) = \sin x$$