

## Exercices : Trigonométrie

### Correction

**Exercice 1.** Convertir en degrés les angles suivants :  $\frac{4\pi}{5}$     $\frac{3\pi}{4}$     $\frac{\pi}{18}$     $\frac{2\pi}{45}$     $\frac{\pi}{10}$     $\frac{\pi}{5}$

On sait que  $\pi \text{ rad.} = 180^\circ$ . Il suffit alors de « remplacer  $\pi$  par  $180^\circ$  » :

$$\frac{4\pi}{5} = \frac{4 \times 180}{5} = \boxed{144^\circ} \quad \frac{3\pi}{4} = \boxed{135^\circ} \quad \frac{\pi}{18} = \boxed{10^\circ} \quad \frac{2\pi}{45} = \boxed{8^\circ} \quad \frac{\pi}{10} = \boxed{18^\circ} \quad \frac{\pi}{5} = \boxed{36^\circ}$$

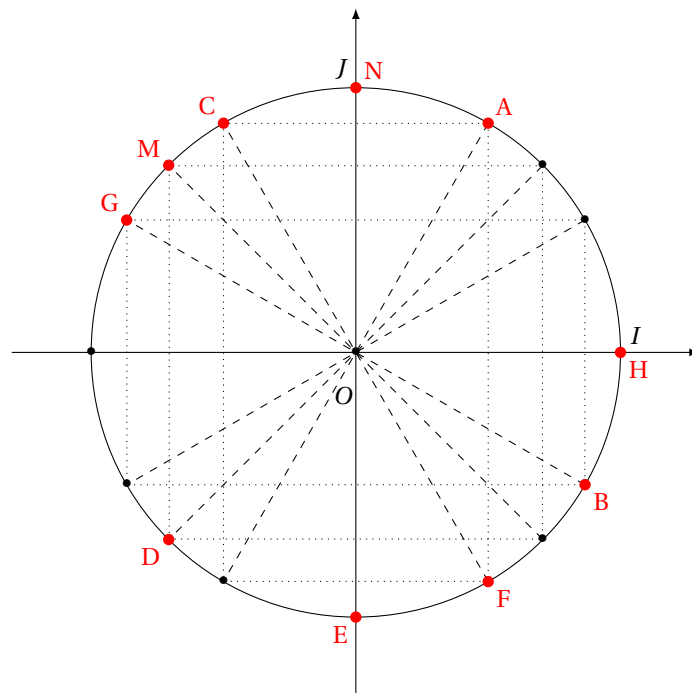
**Exercice 2.** Convertir en radians les angles suivants :  $36^\circ$     $345^\circ$     $210^\circ$     $15^\circ$     $8^\circ$

On sait que  $\pi \text{ rad.} = 180^\circ$ . Pour convertir en radians, il suffit de multiplier par  $\frac{\pi}{180}$  :

$$36^\circ = 36 \times \frac{\pi}{180} = \frac{36\pi}{180} = \boxed{\frac{\pi}{5}} \quad 345^\circ = \boxed{\frac{23\pi}{12}} \quad 210^\circ = \boxed{\frac{7\pi}{6}} \quad 15^\circ = \boxed{\frac{\pi}{12}} \quad 8^\circ = \boxed{\frac{2\pi}{45}}$$

**Exercice 3.** Placer sur le cercle trigonométrique les points suivants, associés aux réels indiqués :

$$\begin{array}{cccc} A\left(\frac{\pi}{3}\right) & B\left(-\frac{\pi}{6}\right) & C\left(-\frac{4\pi}{3}\right) & D\left(\frac{5\pi}{4}\right) \\ E\left(\frac{7\pi}{2}\right) & F\left(-\frac{\pi}{3}\right) & G\left(\frac{5\pi}{6}\right) & H\left(-\frac{6\pi}{3}\right) \\ & M\left(\frac{3\pi}{4}\right) & N\left(\frac{21\pi}{2}\right) & \end{array}$$



**Exercice 4.** On considère la fonction Python MP définie ci-contre.

1. Quel nombre est renvoyé par la fonction MP si  $x$  est égal à :

(a)  $\frac{11\pi}{4}$       (b)  $-\frac{19\pi}{3}$       (c)  $\frac{\pi}{5}$

2. Quel est le rôle de cet algorithme ?

```

1 | from math import pi
2 |
3 | def MP(x):
4 |     if x >= 0:
5 |         while x > pi:
6 |             x = x - 2*pi
7 |         else:
8 |             while x <= -pi:
9 |                 x = x + 2*pi
10 |
11 |     return x

```

1. (a) Pour  $x = \frac{11\pi}{4}$ , la valeur de  $x$  est positive, la condition  $x \geq 0$  est ainsi vérifiée. On boucle alors tant que la valeur de  $x$  est strictement plus grande que  $\pi$ , en enlevant  $2\pi$  à  $x$  à chaque tour de boucle.

$$\frac{11\pi}{4} - 2\pi = \frac{11\pi}{4} - \frac{8\pi}{4} = \frac{3\pi}{4}$$

Dès le premier tour de boucle, la valeur de  $x$  est devenue inférieure à  $\pi$  : la boucle s'arrête alors, et la fonction

retourne la valeur de  $x$  :  $\frac{3\pi}{4}$

- (b) Pour  $x = -\frac{19\pi}{3}$ , la valeur de  $x$  est négative, la condition  $x \geq 0$  n'est pas vérifiée, et c'est la seconde boucle (après le `else`) qui est exécutée. On boucle tant que la valeur de  $x$  est inférieure ou égale à  $-\pi$ , en ajoutant  $2\pi$  à  $x$  à chaque tour de boucle.

$$\begin{aligned}
 -\frac{19\pi}{3} + 2\pi &= -\frac{19\pi}{3} + \frac{6\pi}{3} = -\frac{13\pi}{3} \\
 -\frac{13\pi}{3} + 2\pi &= -\frac{7\pi}{3} \\
 -\frac{7\pi}{3} + 2\pi &= -\frac{\pi}{3}
 \end{aligned}$$

Après 3 tours de boucle, la valeur de  $x$  est supérieure stricte à  $-\pi$  : la boucle s'arrête alors, et la fonction retourne

la valeur de  $x$  :  $-\frac{\pi}{3}$

- (c) Pour  $x = \frac{\pi}{5}$ , valeur positive, le passage dans la boucle n'est pas effectué : en effet,  $\frac{\pi}{5} < \pi$ . La fonction retourne alors

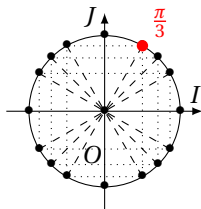
la valeur de  $x$  donnée au départ :  $\frac{\pi}{5}$ .

2. Le rôle de cet algorithme est de donner la valeur de  $X \in [-\pi; \pi[$  associée au même point que  $x$  sur le cercle trigonométrique. On appelle cette valeur la **mesure principale**.

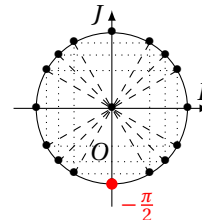
**Exercice 5.** Calculer les valeurs exactes des cosinus et sinus de chacun des nombres réels suivants :

$$\frac{\pi}{3} \quad -\frac{\pi}{2} \quad \frac{7\pi}{3} \quad -\pi \quad -\frac{\pi}{4} \quad \frac{5\pi}{6} \quad 0 \quad \frac{3\pi}{4} \quad \frac{5\pi}{3} \quad \frac{3\pi}{2} \quad \frac{7\pi}{6} \quad -\frac{2\pi}{3}$$

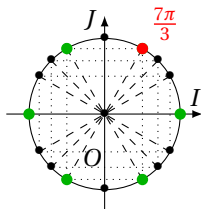
$$\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2} \quad \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$



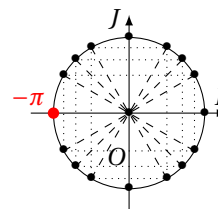
$$\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) = 0 \quad \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -1$$



$$\cos\left(\frac{7\pi}{3}\right) = \frac{1}{2} \quad \sin\left(\frac{7\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

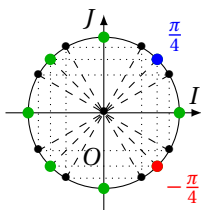


$$\cos(-\pi) = -1 \quad \sin(-\pi) = 0$$

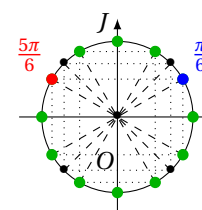


$\frac{7\pi}{3}$  est associé au même point du cercle que  $\frac{\pi}{3}$

$$\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \sin\left(-\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$



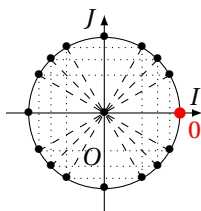
$$\cos\left(\frac{5\pi}{6}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2} \quad \sin\left(\frac{5\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}$$



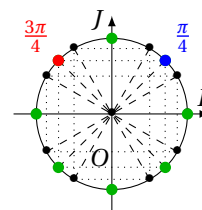
Les points du cercle associés à  $\frac{\pi}{4}$  et  $-\frac{\pi}{4}$  sont symétriques par rapport à l'axe des abscisses : mêmes cosinus, sinus opposés

Les points du cercle associés à  $\frac{\pi}{6}$  et  $\frac{5\pi}{6}$  sont symétriques par rapport à l'axe des ordonnées : cosinus opposés, mêmes sinus

$$\cos(0) = 1 \quad \sin(0) = 0$$

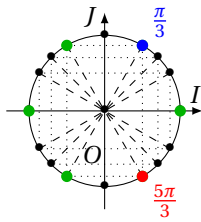


$$\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2} \quad \sin\left(\frac{3\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

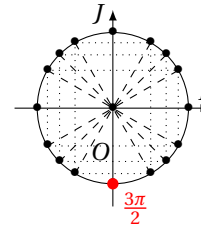


Les points du cercle associés à  $\frac{\pi}{4}$  et  $\frac{3\pi}{4}$  sont symétriques par rapport à l'axe des ordonnées : cosinus opposés, mêmes sinus

$$\cos\left(\frac{5\pi}{3}\right) = \frac{1}{2} \quad \sin\left(\frac{5\pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

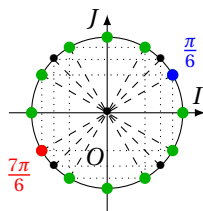


$$\cos\left(\frac{3\pi}{2}\right) = 0 \quad \sin\left(\frac{3\pi}{2}\right) = -1$$



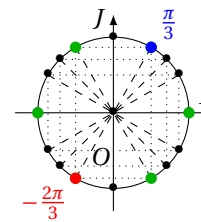
Les points du cercle associés à  $\frac{\pi}{3}$  et  $\frac{5\pi}{3}$  sont symétriques par rapport à l'axe des abscisses : mêmes cosinus, sinus opposés

$$\cos\left(\frac{7\pi}{6}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2} \quad \sin\left(\frac{7\pi}{6}\right) = -\frac{1}{2}$$



Les points du cercle associés à  $\frac{\pi}{6}$  et  $\frac{7\pi}{6}$  sont symétriques par rapport à l'origine : cosinus et sinus opposés

$$\cos\left(-\frac{2\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2} \quad \sin\left(-\frac{2\pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$



Les points du cercle associés à  $\frac{\pi}{3}$  et  $-\frac{2\pi}{3}$  sont symétriques par rapport à l'origine : cosinus et sinus opposés

**Exercice 6.** Même exercice :

$$\frac{101\pi}{6} \quad \frac{70\pi}{3} \quad -\frac{25\pi}{4} \quad \frac{1981\pi}{3}$$

Pour cet exercice, il faut préalablement écrire chaque valeur sous la forme  $k \times 2\pi + \alpha$ , avec  $k \in \mathbb{Z}$  (correspondant au nombre de tours « inutiles ») et  $\alpha \in [-\pi; \pi[$ .

1.  $\frac{101\pi}{6}$  : on cherche les multiples de 6 les plus proches de 101. On a  $6 \times 16 = 96$  et  $6 \times 17 = 102$ . On choisit la valeur paire (16 ici) afin de pouvoir écrire  $k \times 2\pi$  en décomposant :

$$\frac{101\pi}{6} = \frac{96\pi}{6} + \frac{5\pi}{6} = 16\pi + \frac{5\pi}{6} = 8 \times 2\pi + \frac{5\pi}{6}$$

Ainsi,  $\frac{101\pi}{6}$  est associé au même point sur le cercle que  $\frac{5\pi}{6}$  (mais nécessite 8 tours « inutiles »).

On note  $\frac{101\pi}{6} \equiv \frac{5\pi}{6} [2\pi]$  (le  $[2\pi]$  se lit « modulo  $2\pi$  », et représente n'importe quel multiple de  $2\pi$ , ici  $8 \times 2\pi$ ).

On a alors :

$$\cos\left(\frac{101\pi}{6}\right) = \cos\left(\frac{5\pi}{6}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2} \quad \sin\left(\frac{101\pi}{6}\right) = \sin\left(\frac{5\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}$$

2.  $\frac{70\pi}{3}$  : on cherche de même les multiples de 3 les plus proches de 70 :  $3 \times 23 = 69$  et  $3 \times 24 = 72$ . On choisit 72 :

$$\frac{70\pi}{3} = \frac{72\pi}{3} - \frac{2\pi}{3} = 24\pi - \frac{2\pi}{3} = 12 \times 2\pi - \frac{2\pi}{3} \equiv -\frac{2\pi}{3} [2\pi]$$

Donc :

$$\cos\left(\frac{70\pi}{3}\right) = \cos\left(-\frac{2\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2} \quad \sin\left(\frac{70\pi}{3}\right) = \sin\left(-\frac{2\pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

3.  $-\frac{25\pi}{4}$

$$\cos\left(\frac{25\pi}{4}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \sin\left(\frac{25\pi}{4}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

4.  $\frac{1981\pi}{3}$

$$\cos\left(\frac{1981\pi}{3}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2} \quad \sin\left(\frac{1981\pi}{3}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

**Exercice 7.**  $x$  est un nombre réel de l'intervalle  $[0; \frac{\pi}{2}]$ , tel que  $\cos x = \frac{1}{4}$ . Quelle est la valeur exacte de  $\sin x$  ?

Il suffit d'utiliser la formule  $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$ , vraie pour tout réel  $x$ . Si  $\cos x = \frac{1}{4}$ , alors :

$$\cos^2 x + \sin^2 x = 1 \Rightarrow \left(\frac{1}{4}\right)^2 + \sin^2 x = 1 \Rightarrow \frac{1}{16} + \sin^2 x = 1 \Rightarrow \sin^2 x = \frac{15}{16} \Rightarrow \sin x = \pm \sqrt{\frac{15}{16}}$$

D'après l'énoncé,  $x \in [0; \frac{\pi}{2}]$ , donc  $\sin x \geq 0$ , donc  $\sin x = \sqrt{\frac{15}{16}} = \frac{\sqrt{15}}{\sqrt{16}} = \frac{\sqrt{15}}{4}$ .

$$\sin x = \frac{\sqrt{15}}{4}$$

**Exercice 8.** Résoudre les équations suivantes sur l'intervalle donné :

1.  $\sin x = \frac{1}{2}, x \in [0; \frac{\pi}{2}]$

3.  $\sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2}, x \in [-\pi; -\frac{\pi}{2}]$

5.  $2 \cos^2 x - 1 = 0, x \in [-\pi; \pi[$

2.  $\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}, x \in [-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$

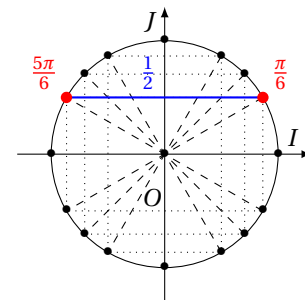
4.  $2 \cos x + 1 = 0, x \in [-\pi; \pi[$

6.  $2 \cos^2 x - 1 = \sin x, x \in [0; 2\pi[$

1.  $\sin x = \frac{1}{2}, x \in [0; \frac{\pi}{2}]$

Pour résoudre cette équation, on commence par déterminer les points du cercle dont l'ordonnée est égale à  $\frac{1}{2}$  (le sinus correspond à l'ordonnée).

On sait que  $\sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$ . Il y a donc deux points qui correspondent : celui associé à  $\frac{\pi}{6}$ , et son symétrique par rapport à l'axe des ordonnées, celui associé à  $\frac{5\pi}{6}$ .



L'équation  $\sin x = \frac{1}{2}$  n'admet pas 2 solutions mais **une infinité de solutions** :

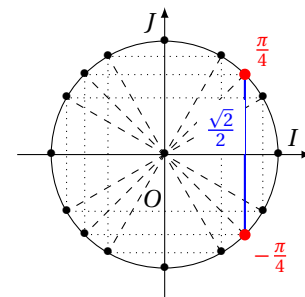
- celles associées au même point du cercle que  $\frac{\pi}{6}$ , qui s'écrivent  $\frac{\pi}{6} + k \times 2\pi, k \in \mathbb{Z}$
- celles associées au même point du cercle que  $\frac{5\pi}{6}$ , qui s'écrivent  $\frac{5\pi}{6} + k \times 2\pi, k \in \mathbb{Z}$

L'énoncé précise l'intervalle dans lequel résoudre l'équation, à savoir  $[0; \frac{\pi}{2}]$ . Dans cet intervalle, un seul réel correspond, c'est  $\frac{\pi}{6}$ .

$$\mathcal{S} = \left\{ \frac{\pi}{6} \right\}$$

2.  $\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}, x \in [-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$

On sait que  $\cos \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ . Deux points du cercle correspondent : celui associé à  $\frac{\pi}{4}$ , et son symétrique par rapport à l'axe des abscisses (on cherche une valeur de cos), celui associé à  $-\frac{\pi}{4}$ .



Ici encore, l'équation  $\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}$  admet une infinité de solutions :

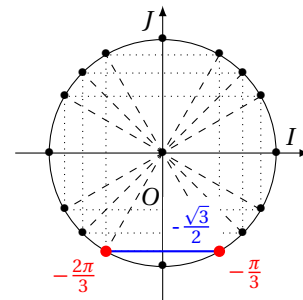
- celles associées au même point du cercle que  $\frac{\pi}{4}$ , qui s'écrivent  $\frac{\pi}{4} + k \times 2\pi$ ,  $k \in \mathbb{Z}$
- celles associées au même point du cercle que  $-\frac{\pi}{4}$ , qui s'écrivent  $-\frac{\pi}{4} + k \times 2\pi$ ,  $k \in \mathbb{Z}$

L'énoncé précise l'intervalle dans lequel résoudre l'équation, à savoir  $[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$ . Dans cet intervalle, deux réels correspondent :  $-\frac{\pi}{4}$  et  $\frac{\pi}{4}$ .

$$\mathcal{S} = \left\{ -\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{4} \right\}$$

3.  $\sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ ,  $x \in [-\pi; -\frac{\pi}{2}]$

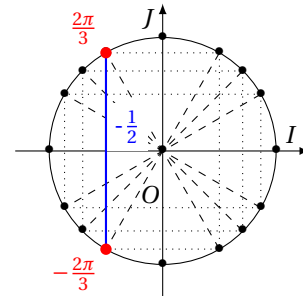
$$\mathcal{S} = \left\{ -\frac{2\pi}{3} \right\}$$



4.  $2 \cos x + 1 = 0$ ,  $x \in [-\pi; \pi[$

$$2 \cos x + 1 = 0 \iff \cos x = -\frac{1}{2}$$

$$\mathcal{S} = \left\{ -\frac{2\pi}{3}; \frac{2\pi}{3} \right\}$$



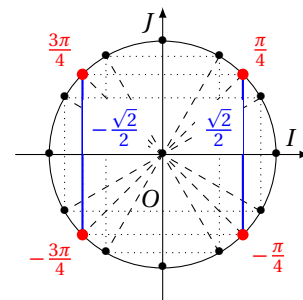
5.  $2 \cos^2 x - 1 = 0$ ,  $x \in [-\pi; \pi[$

$$2 \cos^2 x - 1 = 0 \iff \cos^2 x = \frac{1}{2} \iff \cos x = \sqrt{\frac{1}{2}} \text{ ou } \cos x = -\sqrt{\frac{1}{2}}$$

En remarquant que :  $\sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1 \times \sqrt{2}}{\sqrt{2} \times \sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ , les équations précédentes deviennent :

$$\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \cos x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\mathcal{S} = \left\{ -\frac{3\pi}{4}; -\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{4}; \frac{3\pi}{4} \right\}$$



6.  $2 \cos^2 x - 1 = \sin x$ ,  $x \in [0; 2\pi[$

Il faut transformer l'équation grâce à la formule  $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$ , vraie pour tout réel  $x$ . En effet :

$$\cos^2 x + \sin^2 x = 1 \iff \cos^2 x = 1 - \sin^2 x$$

Il est alors possible de « transformer » le  $\cos^2 x$  dans l'équation en  $\sin^2 x$  :

$$2 \cos^2 x - 1 = \sin x \iff 2(1 - \sin^2 x) - 1 = \sin x \iff 2 - 2 \sin^2 x - 1 = \sin x \iff 1 - 2 \sin^2 x = \sin x$$

En « passant tout à droite » dans l'équation précédente, on obtient l'équation équivalente :

$$2\sin^2 x + \sin x - 1 = 0$$

Cette équation se résoud en posant  $X = \sin x$ . Avec ce changement de variable, l'équation devient :

$$2X^2 + X - 1 = 0$$

C'est une équation du second degré avec  $\Delta = 9 > 0$ , qui admet donc 2 solutions :

$$X_1 = -1 \quad X_2 = \frac{1}{2}$$

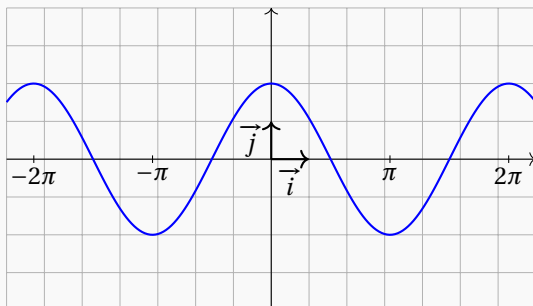
Comme  $X = \sin x$ , il faut alors résoudre les équations suivantes, sur l'intervalle  $[0; 2\pi[$  précisé par l'énoncé :

$$\sin x = -1 \quad \sin x = \frac{1}{2}$$

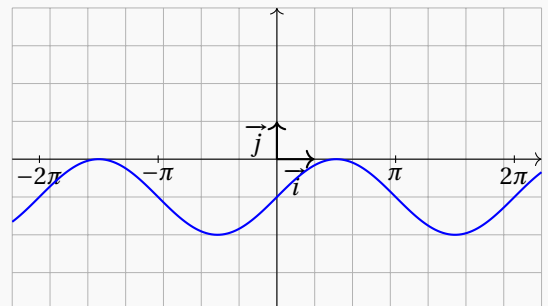
$$\mathcal{S} = \left\{ \frac{\pi}{6}; \frac{5\pi}{6}; \frac{3\pi}{2} \right\}$$

**Exercice 9.** Dans chaque cas, émettre une conjecture sur la parité et la périodicité de la fonction représentée graphiquement.

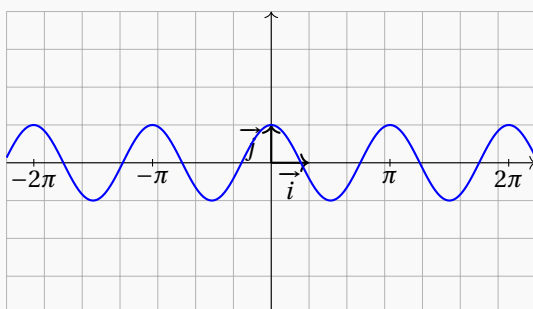
1.



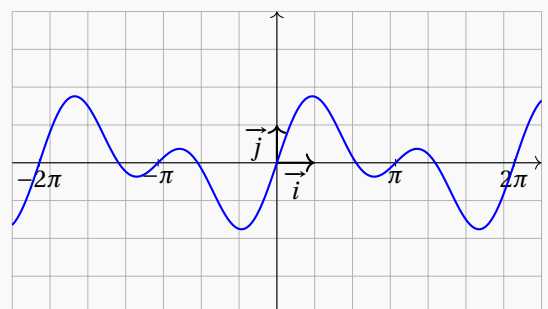
3.



2.



4.



1. La courbe est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées, et présente un motif répétitif de longueur  $2\pi$ .

On conjecture que la fonction est .

2. La courbe est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées, et présente un motif répétitif de longueur  $\pi$ .

On conjecture que la fonction est .

3. La courbe ne fait pas apparaître de symétrie par rapport aux axes, et présente un motif répétitif de longueur  $2\pi$ .

On conjecture que la fonction est  $2\pi$ -périodique, mais n'est ni paire, ni impaire.

4. La courbe est symétrique par rapport à l'origine du repère, et présente un motif répétitif de longueur  $2\pi$ .

On conjecture que la fonction est impaire et  $2\pi$ -périodique.

**Exercice 10.** Pour chacune des fonctions suivantes :

- tracer sa représentation graphique à l'aide de la calculatrice
- conjecturer sa parité et sa périodicité
- démontrer ces conjectures

1.  $f(x) = \cos 2x$

3.  $h(x) = 2 \sin x - 1$

5.  $l(x) = \sin(x + \cos x)$

2.  $g(x) = x - \cos x$

4.  $k(x) = \cos(2x) + \sin(4x)$

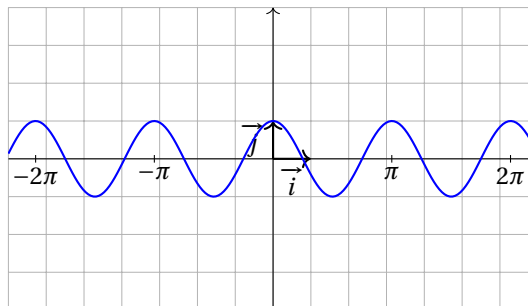
6.  $m(x) = \sin(x + \sin x)$

☞ Pour justifier qu'une fonction  $f$  est paire, on montre que pour tout réel  $x$ ,  $f(-x) = f(x)$

☞ Pour justifier qu'une fonction  $f$  est impaire, on montre que pour tout réel  $x$ ,  $f(-x) = -f(x)$

☞ Pour justifier qu'une fonction  $f$  est  $T$ -périodique, on montre que pour tout réel  $x$ ,  $f(x + T) = f(x)$

1.  $f(x) = \cos 2x$



La fonction  $f$  semble paire et  $\pi$ -périodique. On peut démontrer ces deux résultats :

- Pour tout réel  $x$  :

$$f(-x) = \cos(-2x) = \cos(2x) = f(x)$$

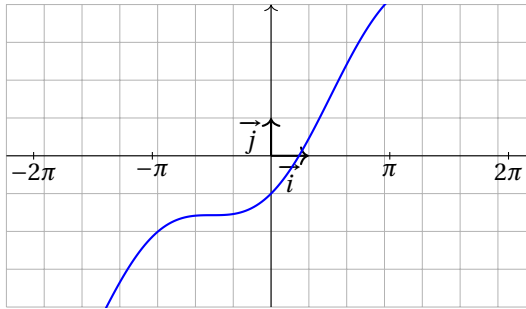
En effet, la fonction  $\cos$  est paire et vérifie, pour tout réel  $x$ ,  $\cos(-x) = \cos x$ , d'où l'égalité.  $f$  est donc bien  $\boxed{\text{paire}}$ .

- Pour tout réel  $x$  :

$$f(x + \pi) = \cos(2(x + \pi)) = \cos(2x + 2\pi) = \cos(2x) = f(x)$$

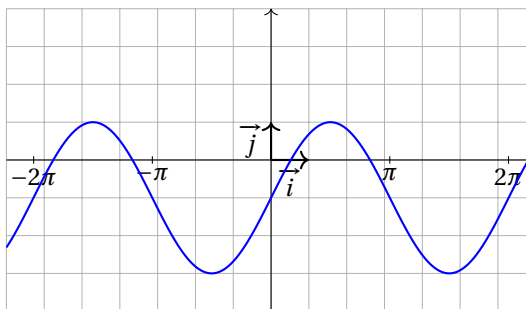
En effet, la fonction  $\cos$  est  $2\pi$ -périodique et vérifie, pour tout réel  $x$ ,  $\cos(x + 2\pi) = \cos x$ , d'où l'égalité.  $f$  est donc bien  $\boxed{\pi\text{-périodique}}$ .

2.  $f(x) = x - \cos x$



La fonction  $f$  n'est ni paire ni impaire (il n'y a pas de symétrie par rapport aux axes du repère) et ne présente pas de périodicité.

3.  $f(x) = 2 \sin x - 1$



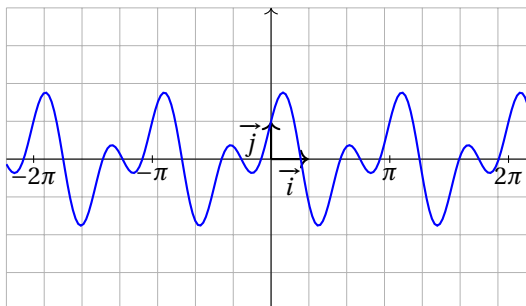
La fonction  $f$  n'est ni paire ni impaire (il n'y a pas de symétrie par rapport aux axes du repère) mais semble  $2\pi$ -périodique. On peut démontrer ce résultat :

- Pour tout réel  $x$  :

$$f(x + 2\pi) = 2 \sin(x + 2\pi) - 1 = 2 \sin(x) - 1 = f(x)$$

En effet, la fonction sin est  $2\pi$ -périodique et vérifie, pour tout réel  $x$ ,  $\sin(x + 2\pi) = \sin x$ , d'où l'égalité.  $f$  est donc bien  $2\pi$ -périodique.

4.  $f(x) = \cos 2x + \sin 4x$

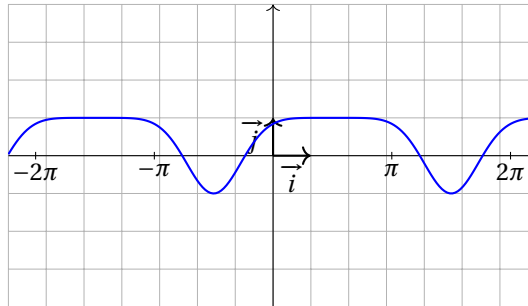


La fonction  $f$  n'est ni paire ni impaire (il n'y a pas de symétrie par rapport aux axes du repère) mais semble  $\pi$ -périodique. On peut démontrer ce résultat :

$$f(x + \pi) = \cos(2(x + \pi)) + \sin(4(x + \pi)) = \cos(2x + 2\pi) + \sin(4x + 4\pi) = \cos(2x) + \sin(4x) = f(x)$$

En effet, les fonctions cos et sin sont  $2\pi$ -périodiques. En particulier, on a bien  $\sin(x + 4\pi) = \sin x$  car sin étant  $2\pi$ -périodique, elle est encore  $4\pi$ -périodique.  $f$  est donc bien  $\pi$ -périodique.

5.  $f(x) = \sin(x + \cos x)$



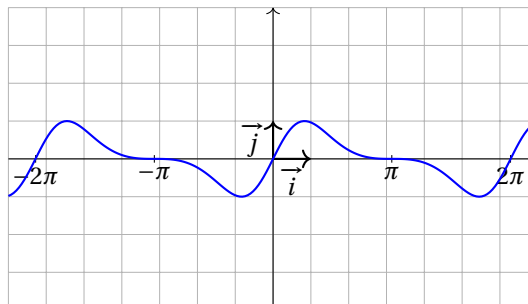
La fonction  $f$  n'est ni paire ni impaire (il n'y a pas de symétrie par rapport aux axes du repère) mais semble  $2\pi$ -périodique. On peut démontrer ce résultat :

- Pour tout réel  $x$  :

$$\begin{aligned}
 f(x+2\pi) &= \sin(x+2\pi + \cos(x+2\pi)) \\
 &= \sin(x + \cos(x+2\pi) + 2\pi) \\
 &= \sin(x + \cos(x) + 2\pi) \text{ car } \cos \text{ est } 2\pi\text{-périodique} \\
 &= \sin(x + \cos x) \text{ car } \sin \text{ est } 2\pi\text{-périodique} \\
 &= f(x)
 \end{aligned}$$

$f$  est donc bien 2π-périodique.

6.  $f(x) = \sin(x + \sin x)$



La fonction  $f$  semble impaire et  $2\pi$ -périodique. On peut démontrer ces deux résultats :

- Pour tout réel  $x$  :

$$f(-x) = \sin(-x + \sin(-x)) = \sin(-x - \sin x) = \sin(-(x + \sin x)) = -\sin(x + \sin x) = -f(x)$$

En effet, la fonction  $\sin$  est impaire et vérifie, pour tout réel  $x$ ,  $\sin(-x) = -\sin x$ , d'où l'égalité.  $f$  est donc bien impaire.

- Pour tout réel  $x$  :

$$\begin{aligned}
 f(x+2\pi) &= \sin(x+2\pi + \sin(x+2\pi)) \\
 &= \sin(x + \sin(x+2\pi) + 2\pi) \\
 &= \sin(x + \sin(x) + 2\pi) \text{ car } \sin \text{ est } 2\pi\text{-périodique} \\
 &= \sin(x + \sin x) \text{ car } \sin \text{ est } 2\pi\text{-périodique} \\
 &= f(x)
 \end{aligned}$$

$f$  est donc bien 2π-périodique.